

# МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ НА ПРИМЕРЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЙ МАЯТНИКА

## METHODS OF TEACHING STUDENTS MATHEMATICAL MODELING USING THE EXAMPLE OF STUDYING THE MOVEMENTS OF A PENDULUM

A. Morozov  
D. Bulekbayev

*Summary:* More than 50 years ago, an outstanding Soviet mathematician, academician L.S. Pontryagin, noted that the most important and interesting technical applications of ordinary differential equations are in the theory of oscillations and the theory of automatic control. He expressed his views on the theory and some of its technical applications in his wonderful book Ordinary Differential Equations. Unfortunately, in modern educational programs of higher education institutions, applied questions in the course of ordinary differential equations are often omitted due to time constraints. This harms the quality of technical education, as students' motivation to study weakens. This article presents a methodology for studying the most important applied problem - the motion of a pendulum performing forced oscillations in a vertical plane. The authors focus on the fundamental concepts of the theory of differential equations and justify the need to use a computer. This approach gives a certain completeness to learning and builds mathematical modeling skills. The authors are convinced that the triad of ordinary differential equations, a personal computer and a numerical experiment should be integrated into the educational process of universities to a greater extent than it is now.

*Keywords:* pendulum equation, phase plane, bifurcations, separatrices, teaching methods.

**Морозов Алексей Валентинович**

кандидат физ.-мат. наук, профессор,  
ФГБОУ ВО «Военно-космическая академия  
имени А.Ф. Можайского»  
vka@mil.ru

**Булекбаев Дастанбек Абдыкалыкович**

доктор технических наук, доцент,  
ФГБОУ ВО «Военно-космическая академия  
имени А.Ф. Можайского»  
vka@mil.ru

*Аннотация:* Более 50 лет назад выдающийся советский математик академик Л.С. Понтрягин отмечал, что наиболее важные и интересные технические применения обыкновенные дифференциальные уравнения находят в теории колебаний и теории автоматического управления. Свои взгляды на теорию и некоторые ее технические приложения он изложил в своей замечательной книге «Обыкновенные дифференциальные уравнения». К сожалению, в современных образовательных программах вузов, прикладные вопросы в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений часто опускаются по причине нехватки времени. Тем самым наносится вред качеству технического образования – у студентов ослабевает мотивация к учебе. В настоящей статье предлагается методика изучения важнейшей прикладной задачи – о движениях маятника, совершающего вынужденные колебания в вертикальной плоскости. Авторы акцентируют внимание на фундаментальных понятиях теории дифференциальных уравнений и обосновывают необходимость использования компьютера. Такой подход придает определенную завершенность обучения и формирует навыки математического моделирования. Авторы убеждены, что триада обыкновенные дифференциальные уравнения, персональный компьютер и вычислительный эксперимент должна быть интегрирована в образовательный процесс вузов в большей степени, чем сейчас.

*Ключевые слова:* уравнение маятника, фазовая плоскость, бифуркации, сепаратрисы, методика обучения.

### Введение

З ададимся вопросом, какие примеры из технических приложений целесообразно рассматривать в разделе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вуза? По мнению авторов настоящей статьи математическая модель, описывающая вынужденные движения маятника в диссипативной среде, является очень хорошим примером [1,2,3]. Кроме того, эта модель описывает и реальные физические процессы, например работу синхронной электрической машины в первом приближении, а также управление системой фазовой автоподстройки частоты. Именно проблема изучения работы синхронной машины явилась мотивацией глобаль-

ного качественного анализа этой модели итальянским математиком Ф. Трикоми [4]. Таким образом, выбранный авторами пример интегрирует учебные предметы, что для технического вуза крайне важно и носит в определенной степени междисциплинарный характер [5]. На примере этой модели необходимо продемонстрировать важнейшие понятия качественной теории ОДУ: динамическую систему и ее пространство состояний, траектории и их типы (состояния равновесия, не замкнутые траектории, циклы, сепаратрисы), процедуру линеаризации, устойчивость и неустойчивость состояний равновесия, первый интеграл, область притяжения, пространство параметров, бифуркации. Перечисленные понятия играют сегодня ключевую роль, как в фундаментальных

науках (математика, физика, механика, химия, биология), так и прикладных. Начинать же изложение надо с обзора иерархии нижеприведенных моделей по степени нарастания их сложности и исследования их на фазовой плоскости [6,7,8]:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \text{ - линейная динамическая система;}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ - гармонический осциллятор;}$$

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ - линейный диссипативный } (\alpha > 0) \text{ осциллятор;}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x \pm \alpha x^3 = 0 \text{ - нелинейный консервативный осциллятор;}$$

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x \pm \alpha x^3 = 0 \text{ - нелинейный диссипативный осциллятор.}$$

Это займет 3-4 часа учебного времени, но без этого изложения дальнейшее будет сложно восприниматься. Перечисленные выше понятия достаточно просто показываются на этих примерах и подготавливают обучающихся к пониманию более сложного и содержательного примера, который ставится во главу угла – о движении маятника в сопротивляющейся среде, находящегося под действием постоянной внешней силы.

**Целью статьи** является изложение методологической схемы изучения одного важного прикладного вопроса теории ОДУ в техническом вузе с небольшим объемом учебных часов, включающего элементы качественного анализа и дополненного компьютерными вычислениями [9]. Авторы убеждены, что образовательная триада: математическая модель, качественный анализ и вычислительный эксперимент, учитывая современный стиль мышления нового поколения обучающихся, должна проходить по всему курсу математики в вуза и это касается не только изложения дифференциальных уравнений. Рекомендуется предлагаемым примером завершить изучение дифференциальных уравнений или рассмотреть его в курсе математического моделирования.

**Материалы и методы исследования.** При изложении предлагаемой методики использовались методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и вычислительной математики. При построения фазовых портретов применялся пакет WinSet [9].

**Математическая модель маятника**

Рассмотрим маятник, совершающий вынужденные движения в вертикальной плоскости под действием постоянного внешнего момента в среде вязкого сопротивления (рис. 1). Согласно второму закону Ньютона, урав-

нение движений такого маятника имеет вид

$$ml^2 \ddot{x} = \gamma_0 - mgl \sin x - \alpha_0 \dot{x}. \quad (1)$$

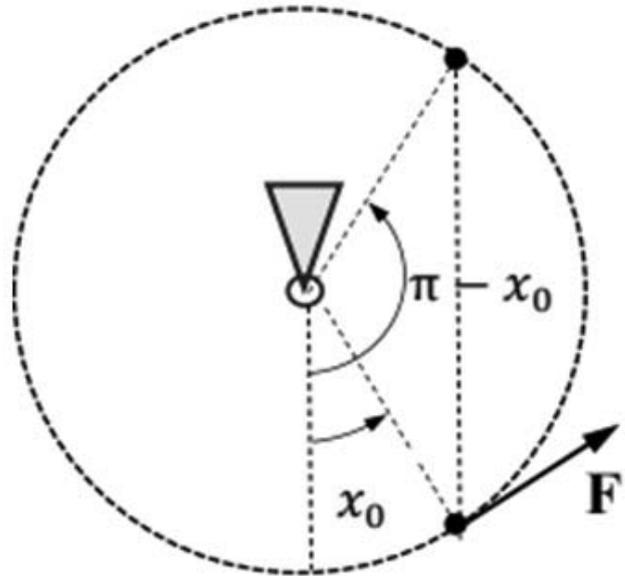


Рис. 1.  $x_0$  и  $\pi - x_0$ - состояния равновесия маятника

Здесь  $l$  – длина стержня маятника,  $m$  – масса,  $x$  – угол отклонения от вертикальной оси,  $g$  – ускорение свободного падения;  $\gamma_0 = |F|l$  – внешний момент, создаваемый постоянной силой  $F$ ;  $\alpha_0 \dot{x}$  ( $\alpha_0 > 0$ ) – момент сил сопротивления среды.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \sin x = \gamma, \quad (2)$$

а также эквивалентной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \gamma - \sin x - \alpha y. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\gamma = \frac{\gamma_0}{mgl}$ ,  $\alpha = \frac{\alpha_0}{ml\sqrt{gl}}$ ,  $t\sqrt{\frac{g}{l}} = \tau$  – новое время, по которому проводится дифференцирование. Таким образом, уравнение (2) и система (3) зависят только от двух параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Здесь возникает важнейшее понятие – пространства (плоскости) параметров. Таким образом, мы изучаем нашу систему (уравнение) в точках первого квадранта  $(\alpha, \gamma)$ .

**Свойства модели и простейшие бифуркации**

Как известно, для уравнений (3) не существует формул, представляющих решения в квадратурах. С другой стороны, необходимости в получении таких формул нет,

так как с физической точки зрения наиболее информативной и показательной является картина расположения траекторий на плоскости  $(x, y)$ . Именно такой подход, называемый качественным, позволяет исследовать свойства решений и их зависимость от параметров. Говоря точнее, при качественном анализе главным вопросом является вопрос о структуре глобальной картины расположения траекторий на плоскости  $(x, y)$  и ее сменах при переходе к другим параметрам системы  $\gamma, \alpha$ . На сказанном, необходимо акцентировать внимание студенческой аудитории.

Отметим, что правые части автономной системы дифференциальных уравнений определяют на плоскости  $(x, y)$  векторное поле. Для системы (3) оно оказывается периодичным по координате  $x$ . Поэтому для построения фазового портрета системы достаточно построить его в полосе

$G_b = \{(x, y): b \leq x \leq b + 2\pi, -\infty < y < +\infty\}$  шириной  $2\pi$ , а затем периодическим образом продолжить на всю плоскость  $(x, y)$  вправо и влево, или склеить плоскость по линиям  $x=b$  и  $x=b+2\pi$ . В таком случае полученная картина будет располагаться на цилиндре (фазовом цилиндре).

Из системы (3), при  $0 < \gamma < 1$  легко находятся состояния равновесия  $C_k(x_k, 0)$ , где  $x_k = (-1)^k \arcsin(\gamma) + \pi k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Три из них  $C_{-1}(-\pi - \arcsin(\gamma), 0)$ ,  $C_0(\arcsin(\gamma), 0)$  и  $C_1(\pi - \arcsin(\gamma), 0)$  принадлежат полосе  $G_{-\pi - \arcsin(\gamma)}$ . Далее, проводя линейный анализ устойчивости, следует проверить, что состояние равновесия  $C_0(\arcsin(\gamma), 0)$  – устойчиво по Ляпунову, а состояния равновесия  $C_{\pm 1}(\mp \pi - \arcsin(\gamma), 0)$  – седловые – неустойчивы по Ляпунову. В силу периодичности векторного поля системы следует, что состояния равновесия  $C_{2n}$  – устойчивы, а  $C_{2n-1}$  – неустойчивы.

При  $\gamma > 1$  состояния равновесия в системе (3) отсутствуют, так как алгебраическая система  $\begin{cases} y = 0, \\ \gamma - \sin x - \alpha y = 0. \end{cases}$  решений не имеет. Учитывая, что  $\gamma > 0$  заключаем, что маятник будет совершать при этом вращательные движения.

Исследование системы (3) целесообразно разбить на этапы.

1.  $\alpha=0$  и  $\gamma=0$  – внешних сил нет. Это консервативный случай: есть 1 интеграл, представляющий собой интеграл энергии.
2.  $\alpha=0$  и  $\gamma>0$  – сил сопротивления нет, но есть внешняя сила.
3.  $\alpha>0$  и  $\gamma=0$  – сопротивление есть, внешней силы нет.
4.  $\alpha>0$  и  $\gamma>0$  – сопротивление и внешняя сила есть (общий случай).

Объединяя 1 и 2 этапы, положим  $\alpha=0$ . Тогда при любом  $\gamma$  система (3) имеет первый интеграл

$$U(x, y) = y^2 - 2\cos x - 2\gamma x. \quad (4)$$

Действительно, дифференцируя функцию  $U(x, y)$  в силу уравнений системы (3), получаем тождество

$$\begin{aligned} \dot{U}_{(3)}(x, y) &= 2y \cdot \dot{y} + 2\sin x \cdot \dot{x} - 2\gamma \dot{x} = \\ &= 2y \cdot (\gamma - \sin x) + 2\sin x \cdot y - 2\gamma y \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что траектории системы (3) находятся на линиях уровня функции  $U(x, y)$ :

$$U(x, y) = C = \text{const.}$$

Встает задача построения семейства кривых, зависящих от параметра  $\gamma$ . Эта задача лежит на стыке анализа и геометрии и потребует некоторого времени на ее изложение. При этом обучающиеся получают домашнее задание: используя какую-либо программу (MathCAD, Mathematica, Maple, MATLAB, WinSet), построить фазовые картины для случаев  $\gamma=0, \gamma=0.5, \gamma=0.8, \gamma=1$ . На рис. 2 изображено семейство этих инвариантных кривых. Необходимо подчеркивать, что: 1) в верхней полуплоскости ( $y>0$ ) все изображающие точки движутся слева направо, в нижней полуплоскости ( $y<0$ ) наоборот – справа налево, 2) изображающие точки пересекают ось абсцисс под прямым углом, исключением являются только те точки, в которых поле не определено, т.е. в состояниях равновесия.

Основной вывод этой части решения заключается в том, что существуют области начальных условий, для которых возникают колебательные движения маятника (на фазовой плоскости им отвечают циклы – замкнутые траектории). Эти колебания происходят относительно угла  $x_0$  ( $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ ). По мере приближения  $\gamma$  к единице разность  $|x_1 - x_0| \rightarrow 0$ , а  $x_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , при этом области колебательных движений уменьшаются и при  $\gamma=1$  стягиваются в седловые состояния равновесия (рис. 2d), а затем при  $\gamma>1$  вовсе исчезают (рис. 2e).

Рассмотрим теперь случай  $\gamma=0$  и  $\alpha>0$ , т.е. внешнего силового момента нет, а сопротивление среды есть. Учитывая свойство поворота векторного поля [10], а также неравенство

$$\dot{U}_{(3)}(x, y) = \frac{d}{dt}(y^2 - 2\cos x) = -\alpha \frac{y^2}{2} \leq 0$$

заключаем, что траектории системы (3) будут прошивать линии уровня  $y^2 - 2\cos x = C$  снаружи внутрь, что приведет в свою очередь к глобальной асимптотической устойчивости системы (3) – движение по любой траектории будет заканчиваться в состоянии равновесия. На

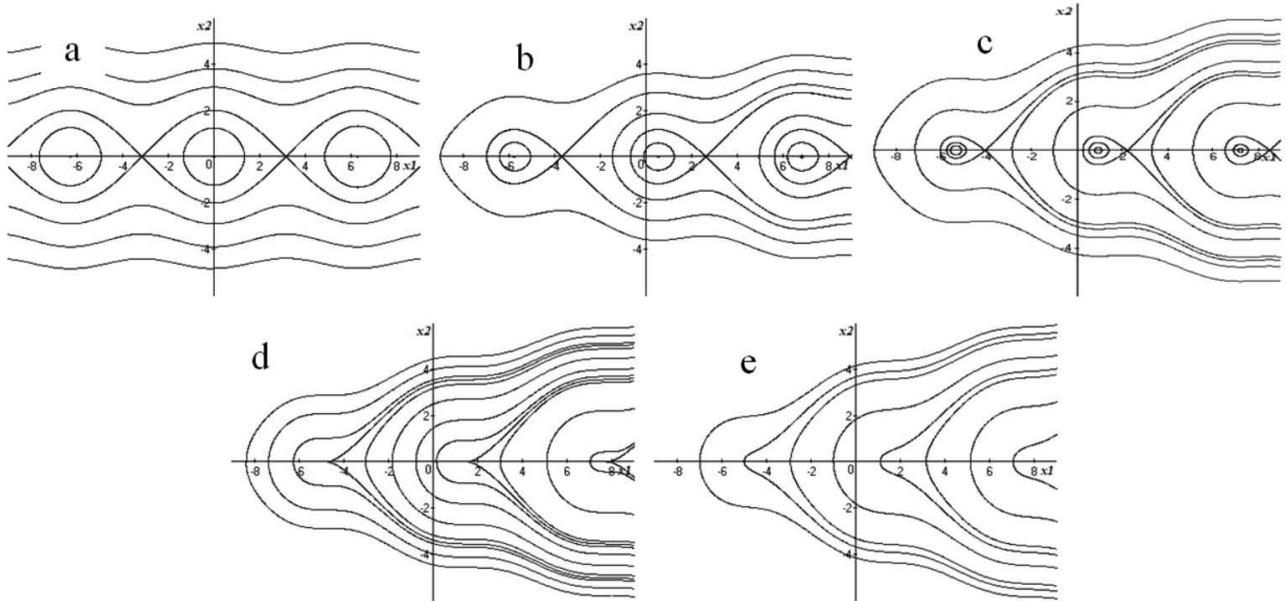


Рис. 2. Фазовый портрет движений маятника при  $\alpha=0$ :  
 а)  $\gamma=0$ ; б)  $\gamma=0.5$ ; в)  $\gamma=0.8$ ; д)  $\gamma=1$ ; е)  $\gamma=1.2$ .

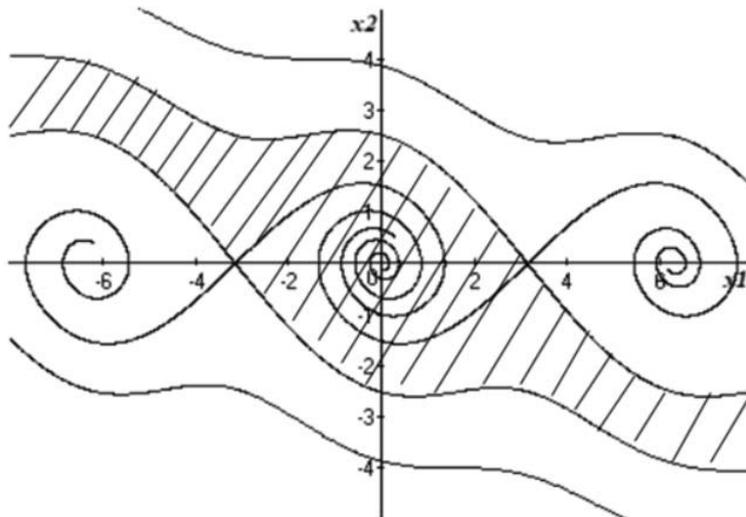


Рис. 3. Область притяжения маятника (показана штриховкой) при  $\gamma=0, \alpha>0$ .

рис.3 изображена штриховкой область притяжения состояния равновесия  $C_0(0,0)$ .

**Главная бифуркация**

Наиболее сложный и содержательный в прикладном аспекте случай уравнение (2) описывает при  $0 < \gamma < 1$  и  $\alpha > 0$ . Приведем основной математический результат, принадлежащий итальянскому математику Ф. Трикоми относительно возможных топологических картин уравнения (2) (системы (3)). Для его формулировки введем следующие обозначения (см. рис. 4):  $s_1$  и  $s_2$  – устойчивые сепаратрисы,  $i_1$  и  $i_2$  – неустойчивые сепаратрисы седлового состояния равновесия  $C_{2n+1}$  (стрелки, указывают направление движения изображающих точек по траекто-

риям при  $t \rightarrow +\infty$ ).

**Теорема (Ф. Трикоми).** Для  $\forall \gamma \in (0,1)$  найдется число  $\alpha = \alpha_*$ , такое, что:

1. При  $\alpha < \alpha_*$  состояния равновесия  $C_{2n}$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) асимптотически устойчивы по Ляпунову, при этом устойчивые сепаратрисы  $s_1$  и  $s_2$  положений равновесия  $C_{2n+1}$  образуют границу областей притяжения  $C_{2n}$  (рис. 5a);
2. При  $\alpha = \alpha_*$  неустойчивые сепаратрисы  $i_1$  положений равновесия  $C_{2n-1}$  сливаются с устойчивыми сепаратрисами  $s_1$  положений равновесия  $C_{2n+1}$  (рис. 5b). При этом говорят, что происходит бифуркация гетероклинической траектории (траектории двояко-асимптотической к сед-

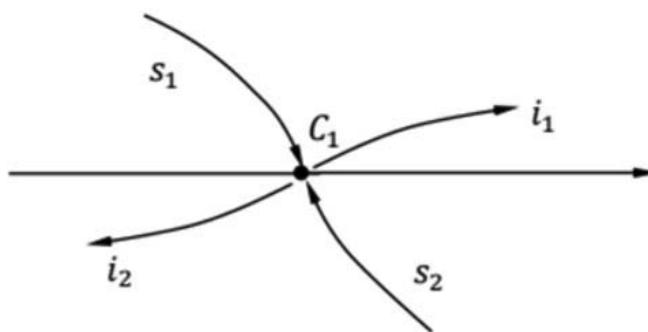


Рис. 4. Устойчивые и неустойчивые сепаратрисы состояния равновесия  $C_1$

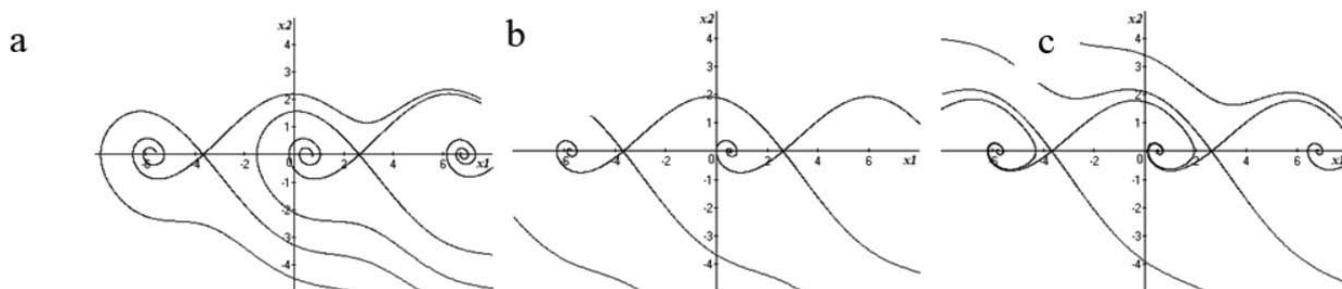
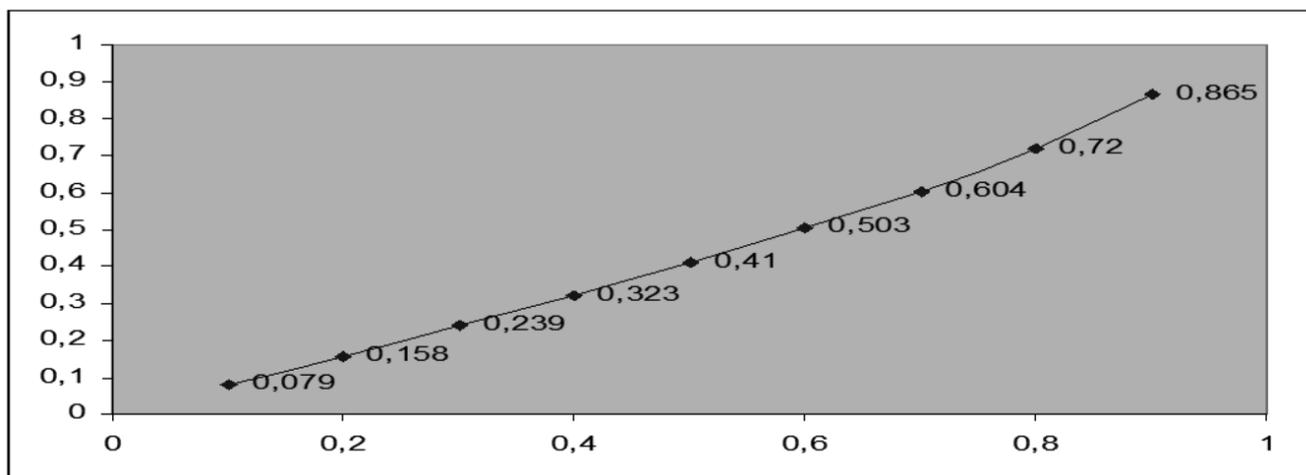


Рис. 5. Фазовые портреты маятника с параметрами: а)  $\gamma=0.5$  и  $\alpha < \alpha_* = 0.41$ ; б)  $\gamma=0.5$  и  $\alpha_* = 0.41$ ; в)  $\gamma=0.5$  и  $\alpha > \alpha_* = 0.41$ .

Таблица 1.

$\gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\alpha_*$	0.07868	0.158051	0.23899	0.32250	0.41006	0.5025	0.60401	0.7197	0.865



лам).

3. При  $\alpha > \alpha_*$  – система глобально асимптотически устойчива (рис. 5с), т.е. любая траектория системы (3) стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к некоторому положению равновесия.

Значение параметра  $\alpha = \alpha_*$  определяет главную би-

фуркацию в нашей задаче – переход системы к глобальной асимптотической устойчивости.

**Замечание.** Доказательство этой теоремы может быть проведено методами качественной теории ОДУ, изучаемой в специальных курсах университетов [4]. В политехнических вузах целесообразно доказательство заменить рядом целенаправленных вычислительных

экспериментов с использованием ПК. С методикой проведения таких вычислений можно ознакомиться по работам [10,11]. Суть ее заключается в идее “пристрелки”: выпускается неустойчивая сепаратриса из седлового состояния равновесия  $C_{-j}$  в направлении собственного вектора линеаризованного векторного поля под углом, определяемым коэффициентом  $\alpha$  и ищется такое его значение  $\alpha_*$ , чтобы “попасть” в малую окрестность другого седлового состояния равновесия  $C_{+j}$ . При этом параметр  $\alpha$  выступает искомым “управлением”.

В таблице 1 приведены бифуркационные значения  $\alpha_*$  для ряда значений параметра  $\gamma$ . Эти значения найдены численно, по указанной выше методике.

В качестве домашнего задания обучающимся предлагалось построить такую таблицу для промежуточных значений  $\gamma$  и тем самым внести в нее уточнение.

### Заключение

Хорошо известно, что класс нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих полное аналитическое решение, не является большим. Это явилось причиной развития большого числа научных направлений, связанных с приближенным исследованием дифференциальных уравнений. В ряде случаев удается получить информацию теоретическими методами, например,

качественными, но эта информация часто оказывается не полной и требует уточнения. Сегодня, благодаря вычислительным средствам и визуализации процессов решения возросла роль численного моделирования с использованием ПК. Синтез этих компонент исследования требует определенных навыков и обучения определенной методики, которая и приведена на примере конкретной задачи в настоящей статье. Подчеркнем, что при численном исследовании рассматриваемой задачи особую роль играют сепаратрисы седловых состояний равновесия. Их взаимное расположение лежит в основе нахождения бифуркационных параметров и оценок областей притяжения положений равновесия.

Изложенная выше методическая схема обучения в течение ряда лет апробировалась на практике в ряде вузов Санкт-Петербурга (Горный университет, ВКА им. А.Ф. Можайского, Политехнический университет Петра Великого), при этом констатировалась положительная динамика в усвоении непростого материала. Авторы статьи выступают против формального натаскивания обучающихся на большом числе искусственных задач и еще раз обращают внимание на тот факт, что большинство задач из приложений требует синтеза аналитических и численных методов и учить надо этому. Настоящая статья может быть полезной для преподавателей вузов, излагающих прикладные вопросы ОДУ [7], либо элементы математического моделирования [12].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва; Ижевск: РХО, 2019. 396 с.
2. Треногин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 312 с.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Издательство физико-математической литературы, 2005. 292 с.
4. Барбашин, Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969. 299 с.
5. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: ЛЕНАНД. 2017. 312 с.
6. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: URSS. 2015. 240с.
7. Басов В.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: лекции и практические занятия. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ. 2023. 436с.
8. Морозов А.Д. Математические методы теории колебаний. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. 2017. 144 с.
9. Морозов А.В. О компьютерном моделировании колебательных систем с одной степенью свободы на фазовой плоскости // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 8. С.147-152.
10. Булекбаев Д.А., Морозов А.В. О построении бифуркационной кривой, отвечающей рождению цикла, в нелинейной системе второго порядка // Перспективы науки. 2023. №8 (167). С.81-84.
11. Булекбаев Д.А., Морозов А.В. К вопросу обучения обыкновенным дифференциальным уравнениям в техническом вузе // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2023. № 687. С. 239-248.
12. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука. Физматлит. 1997. 320 с.

© Морозов Алексей Валентинович (vka@mail.ru), Булекбаев Дастанбек Абдыкалыкович (vka@mail.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»