

К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ТИПА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ МЕТОДОМ ПРИБЛИЖЕННЫХ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

TO STUDY A QUASI-HARMONIC OSCILLATOR OF THE VAN DER POL TYPE BY THE METHOD OF APPROXIMATE POINT MAPPINGS

**O. Antonovskaya
A. Besklubnaya**

Summary. Oscillators are widely used in nature and technology. When considering nonlinear oscillators, it becomes necessary to use asymptotic methods, since, as a rule, there are no exact methods for solving the corresponding differential equations. This article presents the main points of application of the method of approximate point mappings to the study of the dynamics of a quasi-harmonic oscillator of the Van der Pol type. The approximate point mapping is based on the method of successive approximations. Since the sequence functions of the constructed point mapping are explicit, the problem admits of an analytical solution. And the question of the existence of a periodic solution for a quasi-harmonic oscillator is solved as a question of the existence for an approximately constructed point mapping fixed points with one or another type of stability.

Keywords: quasi-harmonic oscillator, point mapping method, phase space, secant plane, asymptotic research methods.

Антоновская Ольга Георгиевна

кандидат физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»
olga.antonovskaja@yandex.ru

Бесклубная Антонина Вячеславовна

кандидат педагогических наук,
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»
antbesk@gmail.com

Аннотация. Осцилляторы получили широкое распространение в природе и технике. При рассмотрении нелинейных осцилляторов возникает необходимость применения асимптотических методов, поскольку, как правило, точных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений не существует. В настоящей статье излагаются основные моменты применения метода приближенных точечных отображений к изучению динамики квазигармонического осциллятора типа Ван-дер-Поля. Приближенное точечное отображение строится на основе метода последовательных приближений. Поскольку функции последования построенного точечного отображения являются явными, задача допускает аналитическое решение. А вопрос о существовании у квазигармонического осциллятора периодического решения решается как вопрос существования у приближенно построенного отображения неподвижных точек с тем или иным характером устойчивости.

Ключевые слова: квазигармонический осциллятор, метод точечных отображений, фазовое пространство, секущая плоскость, асимптотические методы исследования.

Введение

Сегодня нет необходимости специально обосновывать значение колебательных процессов в современной физике и технике. Невозможно найти такой области этих наук, где колебания не играли бы той или иной роли. Более того, ряд областей физики и техники всецело базируется на колебательных явлениях. И здесь прежде всего следует отметить радиотехнику [1]. При этом анализ колебательных явлений показал, что между колебаниями различной физической природы очень много общего. Конкретные колебательные системы, с которыми приходится иметь дело специалистам

в технике совершенно различны, однако колебательно-волновые явления и процессы в них происходящие, подчиняются общим закономерностям и описываются едиными колебательными моделями.

Следует отметить, что до сих пор особый интерес представляет изучение систем, близких к гармоническому осциллятору (квазигармонический осциллятор [1, С.659-663], [2, С. 19-21]. Одним из важных достоинств такой системы является возможность использовать хорошо известные свойства процессов колебаний гармонического осциллятора с медленно меняющейся частотой в различного вида задачах: от задач обработки сигналов

[3] до изучения поведения морских динамических систем [4] и исследования неравновесных экономических систем [5].

В настоящей работе приводится пример исследования квазигармонического осциллятора с полиномиальной нелинейностью методом приближенных точечных отображений [6], [7]. Вопрос о его синхронизации сводится к решению вопроса о существовании неподвижных точек точечного отображения [8], при построении которого используются асимптотические методы. Обсуждается вопрос о локальной применимости результатов приближенного исследования.

Как показано в работах [6], [7], при изучении динамики синхронизируемого осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{x} + x = \mu f\left(x, \dot{x}, \frac{t}{p}\right), \quad (1)$$

в котором $0 < \mu \ll 1$, а $2p\pi$ — период внешней силы, методом точечных отображений [8], исследование поведения траекторий (1) может быть сведено к исследованию поведения траекторий точечного отображения T секущей поверхности $t = \left[\frac{t}{2p\pi}\right] 2p\pi$ фазового пространства $x, y = \dot{x}, t$ в себя [6], порожденного траекториями системы. При этом с точностью до величин порядка μ^2 точечное отображение T может быть приближенно представлено с помощью точечного отображения $\tilde{T}$ с функциями последования

$$\tilde{x} = \left[x_0 - \mu F_1(x_0, y_0) \right] \cos 2p\pi + \left[y_0 + \mu F_2(x_0, y_0) \right] \sin 2p\pi, \quad (2)$$

$$\tilde{y} = -\left[x_0 - \mu F_1(x_0, y_0) \right] \sin 2p\pi + \left[y_0 + \mu F_2(x_0, y_0) \right] \cos 2p\pi, \quad (3)$$

где

$$F_1(x_0, y_0) = \int_0^{2p\pi} f\left(x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \frac{t}{p}\right) \sin t dt, \quad (4)$$

$$F_2(x_0, y_0) = \int_0^{2p\pi} f\left(x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \frac{t}{p}\right) \cos t dt. \quad (5)$$

Заметим, что формулы (2)–(5) явные, поэтому изучение условий существования синхронного режима может быть проведено с помощью изучения условий существования и характера устойчивости простой неподвижной точки $\tilde{x} = x_0 = x^*$, $\tilde{y} = y_0 = y^*$ приближенного точечного отображения $\tilde{T}$.

Одним из наиболее интересных примеров в этой области является уравнение Ван-дер-Поля с малым периодическим возмущением. Небольшая модификация электрической схемы, использованной Ван-дер-Полем [9] приводит к уравнению

$$\ddot{x} + x = \mu \left[\xi x + \eta \dot{x} + 2\beta x^2 + (\dot{x}^2 + x^2 - \beta x^4) \dot{x} + A \cos t \right], \quad (6)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $\beta > 0$, $A > 0$, или, если ввести $y = \dot{x}$, системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \mu \left[\xi x + \eta y + 2\beta x^2 + (x^2 + y^2 - \beta x^4) y + A \cos t \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача состоит в нахождении условий существования y (7) периодического решения с периодом 2π .

Функции последования точечного отображения $\tilde{T}$, приближающего точечное отображение T секущей поверхности $t = \left[\frac{t}{2\pi}\right] 2\pi$ фазового пространства $x, y = \dot{x}, t$ в себя, порожденного траекториями системы (7), с точностью до величин порядка μ^2 будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_0 + \mu \pi \left[x_0 \left(\eta + (x_0^2 + y_0^2) - \frac{\beta}{8} (x_0^2 + y_0^2)^2 \right) - \xi y_0 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= y_0 + \mu \pi \left[y_0 \left(\eta + (x_0^2 + y_0^2) - \frac{\beta}{8} (x_0^2 + y_0^2)^2 \right) + \xi x_0 + A \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Условия существования неподвижной точки отображения (8)–(9) определяют соотношения

$$x^* = -\frac{A\xi}{\left(\eta + \rho - \frac{\beta\rho^2}{8} \right)^2 + \xi^2}, \quad (10)$$

$$y^* = -\frac{A\left(\eta + \rho - \frac{\beta\rho^2}{8} \right)}{\left(\eta + \rho - \frac{\beta\rho^2}{8} \right)^2 + \xi^2},$$

где $\rho = x^{*2} + y^{*2} > 0$ находится из уравнения

$$\rho \left[\left(\eta + \rho - \frac{\beta\rho^2}{8} \right)^2 + \xi^2 \right] = A^2. \quad (11)$$

То есть факт существования неподвижных точек отображения (8)–(9) определяется фактом существования корней $\rho > 0$ уравнения (11). Детальный анализ уравнения (11) позволяет получить картину резонансных кривых при различных значениях параметров системы (см., например, рисунок 1). При малых значениях A следует

ожидать существование двух ветвей резонансной кривой, одна из которых является замкнутой. При увеличении A эти ветви, сближаясь сливаются в одну, т.е. образуется одна незамкнутая ветвь резонансной кривой.

Устойчивость неподвижных точек точечного отображения $\tilde{T}$ в случае их существования, определяется корнями характеристического полинома

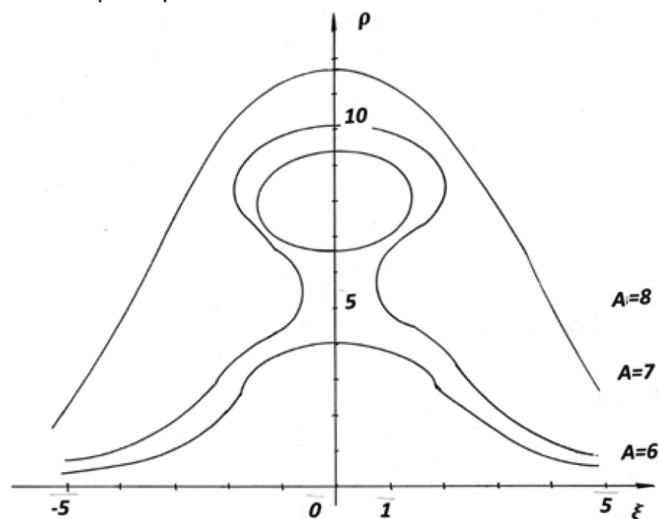


Рис. 1. Примерный вид резонансных кривых при $\eta = 1, \beta = 1$

$$P(z) = \left[z - \left(1 + \mu \pi \left(\eta + 2\rho - \frac{3\beta\rho^2}{8} \right) \right) \right]^2 + (\mu\pi)^2 \left(\xi^2 - \left(\frac{\beta\rho^2}{4} - \rho \right)^2 \right). \quad (12)$$

Поэтому границы области устойчивости $N_+(z=1)$, $N_-(z=-1)$ и $N_\phi(z=\pm e^{i\phi})$, определяются, соответственно, уравнениями:

$$\left(\eta + \rho - \frac{\beta\rho^2}{8} \right) \left(\eta + 3\rho - \frac{5\beta\rho^2}{8} \right) + \xi^2 = 0, \quad (13)$$

$$\left[2 + \mu \pi \left(\eta + \rho - \frac{\beta\rho^2}{8} \right) \right] \left[2 + \mu \pi \left(\eta + 3\rho - \frac{5\beta\rho^2}{8} \right) \right] + (\mu\pi)^2 \xi^2 = 0, \quad (14)$$

$$\left[\left(1 + \mu \pi \left(\eta + 2\rho - \frac{3\beta\rho^2}{8} \right) \right) \right]^2 + (\mu\pi)^2 \left(\xi^2 - \left(\frac{\beta\rho^2}{4} - \rho \right)^2 \right) = 1. \quad (15)$$

Кривые (13)–(14) являются замкнутыми и располагаются в ограниченной части плоскости, которая расширяется при $\mu \rightarrow +0$. Граница (15) соединяет точки их касания с границей N_ω

$$\xi^2 - \left(\frac{\beta\rho^2}{4} - \rho \right)^2 = 0, \quad (16)$$

соответствующей уходу пары корней характеристического полинома с действительной оси. Границы D -разбиения с соответствующей штриховкой в сторону выхода корней характеристического уравнения из единичного круга приведены на рисунке 2. Однократная штриховка соответствует бифуркации корней на действительной оси, двойная — бифуркации комплексно-сопряженных корней. Область $D=0$ есть область устойчивости.

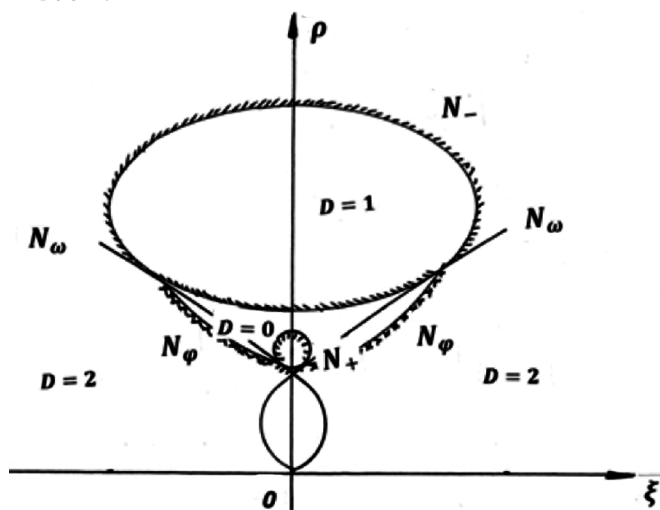
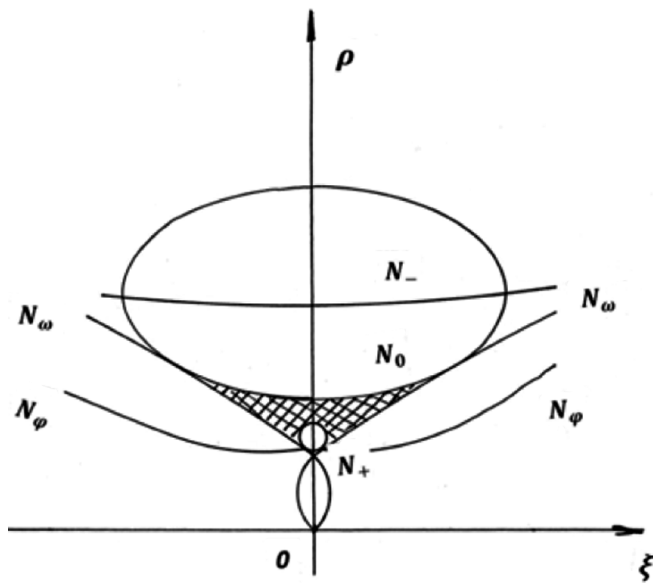
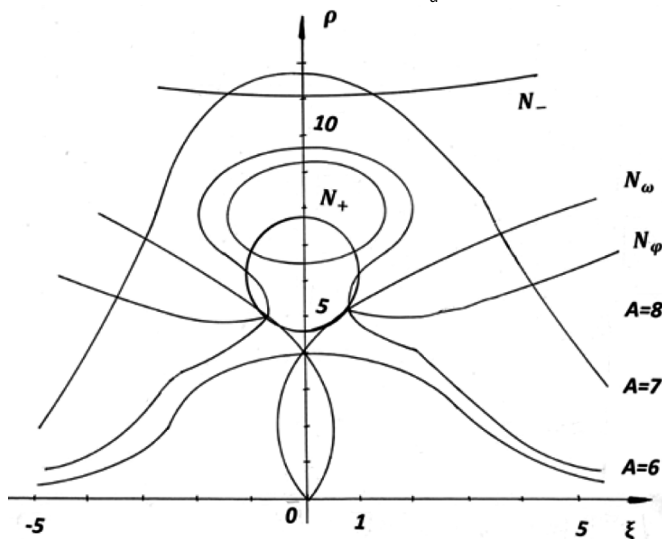


Рис. 2. Примерный вид границ D -разбиения при малых μ

Внутри области устойчивости можно выделить область аperiodической устойчивости D_a ($0 < z_{1,2} < 1$), которая располагается между границами N_+ и $N_0(z=0)$

$$\left[1 + \mu \pi \left(\eta + \rho - \frac{\beta\rho^2}{8} \right) \right] \left[1 + \mu \pi \left(\eta + 3\rho - \frac{5\beta\rho^2}{8} \right) \right] + (\mu\pi)^2 \xi^2 = 0, \quad (17)$$

а по бокам ограничена ветвями границы N_ω (рисунок 3). Именно для значений параметров из этой области следует ожидать аperiodических переходных процессов в системе, поскольку, как только хотя бы один из корней характеристического уравнения становится отрицательным, или же пара их уходит с действительной оси [10, с. 40–51], в системе возникает колебательность того или иного рода. Факт существования у отображения $\tilde{T}$ неподвижных точек с некоторым характером устойчивости при $A = \text{const}$ и различных ξ может быть решен наложением картины существования неподвижных точек с различным характером устойчивости на плоскости ξ, ρ при заданном μ на плоскость с резонансной кривой при заданном A (рисунок 4).

Рис. 3. Область D_a Рис. 4. Наложение картины резонансных кривых на плоскость с границами области устойчивости при $\eta = 1, \beta = 1, \mu\pi = 0,05$

Кроме того, следует отметить, что для нелинейностей, входящих функции последования отображения $\tilde{T}$, имеет место соотношение

$$(\mu\pi)^2 \left[\left(x_0 \left(\eta + (x_0^2 + y_0^2) - \frac{\beta}{8} (x_0^2 + y_0^2)^2 \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(y_0 \left(\eta + (x_0^2 + y_0^2) - \frac{\beta}{8} (x_0^2 + y_0^2)^2 \right) \right)^2 \right] = \\ = (\mu\pi)^2 (x_0^2 + y_0^2) \left(\eta + (x_0^2 + y_0^2) - \frac{\beta}{8} (x_0^2 + y_0^2)^2 \right)^2, (18)$$

причем выражение в (18) при $(x_0^2 + y_0^2) \rightarrow +\infty$ стремится к бесконечности быстрее, чем $(x_0^2 + y_0^2)$. А значит [11] бесконечность в приближенной модели является устойчивой, а устойчивый режим в случае его существования имеет ограниченную область притяжения, которая расширяется при $\mu \rightarrow +0$.

Заключение

Следует отметить, что поведение системы (2) исследовалось с помощью асимптотического метода, каковым является метод приближенных точечных отображений, поскольку при построении приближенного точечного отображения используется метод Ван-дер-Поля [2, С. 371] и метод последовательных приближений. То есть актуальным является вопрос о применимости результатов приближенного исследования, а значит об обосновании метода приближенных точечных отображений, как асимптотического метода. Такое обоснование дано в работе [12], то есть можно вести речь о совпадении (по крайней мере, локальном) разбиений фазовых пространств на траектории при малых значениях параметра μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — 915 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
3. Журавлев В.М., Миронов П.П., Летунев С.В. Построение огибающей и локальной частоты стохастического процесса на основе модели осциллятора с флуктуирующей частотой. // Изв. Вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2013. — № 3(27). — С.159–169.
4. Ковалев Д.П., Ковалев П.Д. Хаотические колебания, бифуркация и синхронизация в морских динамических системах. — Южно-Сахалинск: ИМГиГ ДВО РАН, 2021. — 114 с.
5. Ивинская Е.Ю. Теоретические аспекты исследования неравновесных экономических систем на основе модели гармонического осциллятора. // Теория и практика общественного развития. Экономические науки. — 2015. — № 21. — С. 57–59.
6. Антоновская О.Г. О влиянии насыщения нелинейности на результаты исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений. // Математическое моделирование и оптимальное управление. Вестник ННГУ. — Нижний Новгород: ННГУ, 1999. — № 2(21). — С.198–208.
7. Антоновская О.Г., Зайцева М.Н. Об одном случае исследования принудительной синхронизации методом приближенных точечных отображений. // Международный научно-исследовательский журнал. — 2018. — № 8(74). — С. 7–14.
8. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1972. — 472 с.

9. Калякин Л.А. Анализ модели синхронизации в неизохронной системе. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. — Т. 50. — № 8. — С. 1408–1419.
10. Косякин А.А., Шамриков Б.М. Колебания в цифровых автоматических системах. — М.: Наука, 1983. — 336 с.
11. Антоновская О.Г., Бесклубная А.В. О влиянии характера нелинейности на результаты исследования синхронизации квазигармонического осциллятора методом приближенных точечных отображений. // Международный научно-исследовательский журнал. — 2021. — № 1(103). — С. 22–29.
12. Антоновская О.Г. Метод последовательных приближений в оценке близости приближенного и точного точечных отображений при учете неизохронности процессов в динамике систем ИФАПЧ. // Вестник ННГУ, Нижний Новгород. — 2013. — № 5(1). — С. 210–212.

© Антоновская Ольга Георгиевна (olga.antonovskaja@yandex.ru); Бесклубная Антонина Вячеславовна (antbesk@gmail.com)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»