МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА МЕЖДУ НЕПОДВИЖНОЙ И ПОДВИЖНОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

MATHEMATICAL MODELING OF VISCOUS HEAT-CONDUCTING GAS BETWEEN THE FIXED AND MOVABLE HORIZONTAL WALL

V. Gabdulkhaev

Annotation

In the book [1], a method of solving the complete Navier–Stokes equations using trigonometric series. The solution presented in the form when added to the specified background trigonometric series in the spatial variables with unknown coefficients depending on time. To these factors we obtain an infinite system of ordinary differential equations. With the help of identical transformations, the system is reduced to the form, which requires significantly fewer arithmetic operations in the calculation of the right sides of the system of ordinary differential equations compared to the original presentation.

In this paper as a background to take one course of an exact solution of the full Navier–Stokes equations describing the motion of the gas between the two horizontal walls, one of which moves, and the other is stationary.

Keywords: The complete system of Navier–Stokes equations, complex gas flow, nonlinear partial differential equations.

Габдулхаев Вадим Фатикович
Уральский государственный университет путей сообщения

Аннотация

В книге [1] предложена методика решения полной системы уравнений Навье–Стокса с помощью тригонометрических рядов. При этом решение представляется в виде, когда к заданному фону прибавляются тригонометрические ряды по пространственным переменным с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. Для этих коэффициентов получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. С помощью тождественных преобразований, эта система сведена к виду, который требует выполнения существенно меньшего числа арифметических операций при вычислении правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений по сравнению с первоначальным представлением.

В данной работе в качестве фонового течения взято одно точное решение полной системы уравнений Навье–Стокса, описывающего движение газа между двумя горизонтальными стенками, одна из которых движется, другая неподвижна.

Ключевые слова:

Полная система уравнений Навье–Стокса, сложные течения газа, нелинейные уравнения с частными производными.

Точное решение полной системы уравнений Навье-Стокса

Рассматривается случай двумерных течений политропного газа с уравнениями состояния (1) и (2) при постоянных значениях μ, $\mu'=0, k$ и в качестве контактной поверхности берется плоскость $x=0$, т.е. $\upsilon_1\big|_{x=0}=0$

$$p = R\rho T \tag{1}$$

где
p - давление газа,
ρ – плотность,
$R = \text{const} > 0$ – газовая постоянная,
T – температура газа;

$$e = c_{\upsilon o}T \tag{2}$$

где
e – внутренняя энергия,
$c_{\upsilon o} = const > 0$ – постоянная удельная тепло емкость при постоянном объеме,
T – температура газа;

$$\frac{R}{c_{\upsilon o}} = \gamma - 1$$

где
$\gamma = \text{const} > 1$ – показатель политропы газа;

Берется полная система уравнений Навье–Стокса, представленная в следующем виде:

$$(x = x_1, \mathrm{y} = x_2, u = \upsilon_1, \upsilon = \upsilon_2):$$

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \upsilon\rho_y + \rho(u_x + \upsilon_y) = 0 \\ \rho u_t + \rho(uu_x + \upsilon u_y) + \dfrac{1}{\gamma}(T\rho_x + \rho T_x) = \\ = \mu_0(u_{xx} + \dfrac{3}{4}u_{yy} + \dfrac{1}{4}\upsilon_{xy}) \\ \rho\upsilon_t + \rho(u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y) + \dfrac{1}{\gamma}(T\rho_y + \rho T_y) = \\ = \mu_0(\upsilon_{yy} + \dfrac{3}{4}\upsilon_{xx} + \dfrac{1}{4}u_{xy}) \\ \rho T_t + \rho(uT_x + \upsilon T_y) + (\gamma-1)\rho T(u_x + \upsilon_y) = \\ = \kappa_0(T_{xx} + T_{yy}) + \gamma(\gamma-1)\mu_0 \\ \left\{\dfrac{1}{2}\left[(u_x - \upsilon_y)^2 + u_x^2 + \upsilon_y^2\right] + \dfrac{3}{4}(u_y + \upsilon_x)^2\right\} \end{cases}$$

Для данной системы, имеются следующие формулы, задающие точное двумерное стационарное решение, когда $\dfrac{\partial}{\partial z} = w = 0$

$$\rho = a_1$$

$$\left.\begin{aligned} u = \upsilon_1 &= \frac{a_2 \cdot \mathrm{Re} \cdot y^2}{3} \\ \mathrm{Re} &= \frac{4}{3\mu_0} \end{aligned}\right| \Rightarrow u = \frac{4a_2}{9\mu_0}y^2$$

$$\begin{aligned} &\upsilon = \upsilon_2 = 0 \\ &T = a_2 x + a_3 \qquad (4) \\ &a_2 > 0 \end{aligned}$$

где

ρ – плотность газа,

u – скорость вдоль оси ОХ,

υ – скорость вдоль оси ОУ,

T - температура газа.

Проверим подстановкой, что формулы (4) являются точным решением полной системы уравнений Навье–Стокса (3).

Подставляя точное решение (4) в систему (3) получатся тождественные равенства, при $\gamma = \dfrac{3}{2}$ и $a_1=1$. Таким образом, формулы (4) являются точным решением полной системы уравнений Навье–Стокса (3), а значит они задают конкретное течение сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

Физический смысл точного решения:

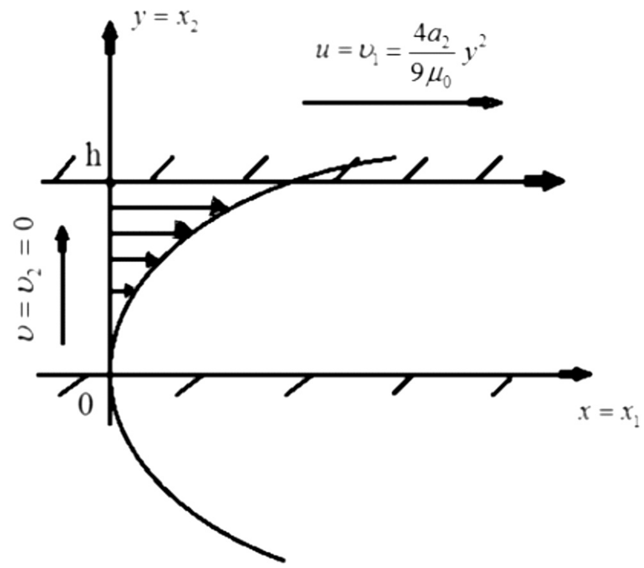
Плотность $\rho = const$;

$u = \dfrac{4a_2}{9\mu_0}y^2$ – скорость вдоль оси Ox – квадратичная функция от переменной y. Она равна нулю, только при y=0, в остальных случаях она положительна;

$\upsilon = \upsilon_2 = 0$ – скорость вдоль оси Oy, равная нулю;

$T = a_2x + a_3$ – температура газа, линейная функция от x;

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$



Будем рассматривать только верхнюю полуплоскость, и только до некоторой высоты h, где скорость u будет являться некой положительной константой. Значит на всей прямой y=h, скорость u вдоль оси Ox постоянна. Так как скорость вдоль оси Oy равна нулю, то движения вдоль оси Oy нет. Поэтому, исходя из нашей задачи, мы можем взять полосу между прямыми y=0 и y=h, и изучать течения не выходя из границ нашей полосы. В этой полосе нижняя плоскость y=0 стоит на месте, а верхняя y=h движется вдоль оси Ox с постоянной скоростью.

Таким образом, рассматриваются течения между неподвижной плоскостью y=0, с условиями прилипания (5) на ней и подвижной плоскостью y=h, движущейся со скоростью $u = \dfrac{4a_2}{9\mu_0} y^2$

с условиями прилипания (6) на ней.

$$u\Big|_{y=0} = 0 \;,\; \upsilon\Big|_{y=0} = 0 \qquad (5)$$

$$u\Big|_{y=h} = \frac{4a_2}{9\mu_0} h^2 \;,\; \upsilon\Big|_{y=h} = 0 \qquad (6)$$

Вид искомого решения полной системы уравнений Навье–Стокса

В книге [1] представлен эквивалентный переход от системы (3) к системе:

$$\begin{cases} \delta_t + u\delta_x + \upsilon\delta_y - \delta(u_x + \upsilon_y) = 0 \\ u_t + uu_x + \upsilon u_y + \dfrac{1}{\gamma}\delta p_x = \\ = \mu_0 \delta(\dfrac{1}{4}\upsilon_{xy} + u_{xx} + \dfrac{3}{4}u_{yy}) \\ \upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + \dfrac{1}{\gamma}\delta\rho_y = \\ = \mu_0 \delta(\dfrac{1}{4}u_{xy} + \upsilon_{yy} + \dfrac{3}{4}\upsilon_{xx}) \\ p_t + up_x + \upsilon p_y + \gamma p(u_x + \upsilon_y) = \\ = \kappa_0 p(\delta_{xx} + \delta_{yy}) + 2\kappa_0(p_x\delta_x + p_y\delta_y) + \\ + \kappa_0\delta(p_{xx} + p_{yy}) + \mu_0\gamma(\gamma - 1) \\ \left[(u_x^2 - u_x\upsilon_y + \upsilon_y^2) + \dfrac{3}{4}(u_y + \upsilon_x)^2\right] \end{cases} \qquad (7)$$

Будем строить решение полной системы уравнений Навье–Стокса (3) в виде:

$$\vec{u}(t,x,y) = \vec{u}_0(x,y) + \vec{u}_*(t,x,y) \qquad (8)$$

где

$\vec{u}_0(x,y)$ – точное решение полной системы уравнений Навье–Стокса (3),

$\vec{u}_*(t,x,y$ – возмущения.

Для представления (8) на плоскостях $y=0$ и $y=h$ выполняются условия теплоизоляции, то есть:

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=h} = 0 \qquad (10)$$

Далее необходимо получить бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэф–фициентов
рядов (9).

$$\delta_0(t),\ \delta_{1k}(t),\ \delta_{2k}(t),\ \delta_{3m}(t),\ u_{1k}(t),\ u_{2k}(t),\ u_{3m}(t),\ \upsilon_{1k}(t),\ \upsilon_{2k}(t),\ \upsilon_{3m}(t),\ p_0(t),\ p_{1k}(t),\ p_{2k}(t),\ p_{3m}(t)$$

Искомое решение полной системы уравнений Навье–Стокса (3) будет представлено в виде:

$$\delta = \frac{1}{a_1} + \delta_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\delta_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + \delta_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\delta_{3m}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)$$

$$u = \frac{4a_2}{9\mu_0}y^2 + \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + u_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\right] + \sum_{m=1}^{\infty}u_{3m}(t)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)$$

$$\upsilon = \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[\upsilon_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + \upsilon_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\right] + \sum_{m=1}^{\infty}\upsilon_{3m}(t)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y) \qquad (9)$$

$$p = a_1(a_2x + a_3) + p_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[p_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + p_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\right] + \sum_{m=1}^{\infty}p_{3m}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)$$

Получение бесконечной системы обыкновенных уравнений для коэффициентов представлений (9)

Подставим представления (9) в систему (7). На примере нахождения обыкновенного дифференциального уравнения для $\delta_0'(t)$, из первого уравнения системы, покажем алгоритм получения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов

$\delta_{1k}(t)$, $\delta_{2k}(t)$, $\delta_{3m}(t)$, $u_{1k}(t)$, $u_{2k}(t)$, $u_{3m}(t)$, $\upsilon_{1k}(t)$, $\upsilon_{2k}(t)$, $\upsilon_{3m}(t)$, $p_0(t)$, $p_{1k}(t)$, $p_{2k}(t)$, $p_{3m}(t)$ рядов (9).

Рассмотрим первое уравнение системы (7):

$$\delta_t + u\delta_x + \upsilon\delta_y - \delta(u_x + \upsilon_y) = 0 \ ; \quad \delta_t = \delta u_x + \delta\upsilon_y - u\delta_x - \upsilon\delta_y \ ;$$

Распишем суммы рядов, вычислим производные раскроем скобки, в результате получим:

$$\begin{aligned}
&\delta_0'(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\delta_{1k}'(t)\cdot\cos(k\cdot x) + \sum_{k=1}^{\infty}\delta_{2k}'(t)\cdot\sin(k\cdot x) + \sum_{m=1}^{\infty}\delta_{3m}'(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y) = \\
&= (-1)\cdot\frac{1}{a_1}\cdot\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot u_{1k}(t)\cdot\sin(k\cdot x) \\
&-\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1k}(t)\cdot u_{1n}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x) - \\
&-\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{2k}(t)\cdot u_{1n}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x) - \\
&-\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}k\cdot\delta_{3m}(t)\cdot u_{1k}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sin(k\cdot x) + \\
&+\frac{1}{a_1}\cdot\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot u_{2k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + \\
&+\delta_0(t)\cdot\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot u_{2k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + \\
&+\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1k}(t)\cdot u_{2n}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x) + \\
&+\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{2k}(t)\cdot u_{2n}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x) + \\
&+\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}k\cdot\delta_{3m}(t)\cdot u_{2k}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(k\cdot x) + \\
&+\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + \\
&+\delta_0(t)\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x) + \\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{1k}(t)\cdot\upsilon_{1n}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x) + \\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{2k}(t)\cdot\upsilon_{1n}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{3m}(t)\cdot\upsilon_{1k}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(k\cdot x)+\\
&+\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)+\\
&+\delta_0(t)\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)+\\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{1k}(t)\cdot\upsilon_{2n}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)+\\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{2k}(t)\cdot\upsilon_{2n}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)+\\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{3m}(t)\cdot\upsilon_{2k}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sin(k\cdot x)+\\
&+\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+\\
&+\delta_0(t)\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+\\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\delta_{1k}(t)\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+\\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\delta_{2k}(t)\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+\\
&+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{3m}(t)\cdot\upsilon_{3n}(t)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+\\
&+\frac{4a_2}{9\mu_0}y^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\delta_{1k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)+\\
&+\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1n}(t)\cdot u_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)+\\
&+\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1n}(t)\cdot u_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}k\cdot\delta_{1k}(t)\cdot u_{3m}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)-\\
&-\frac{4a_2}{9\mu_0}y^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\delta_{2k}(t)\cdot\cos(k\cdot x)-\\
&-\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{2n}(t)\cdot u_{1k}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)-\\
&-\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{2n}(t)\cdot u_{2k}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)-\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}k\cdot\delta_{2k}(t)\cdot u_{3m}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\upsilon_{1k}(t)\cdot\delta_{3m}(t)\cdot\cos(k\cdot x)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\upsilon_{2k}(t)\cdot\delta_{3m}(t)\cdot\sin(k\cdot x)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\delta_{3n}(t)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y);$$

Проинтегрируем данное уравнение по dx от 0 *до* 2π *и по* dy от 0 *до* h *и воспользуемся свойствами двойных интегралов:*

$$\underline{\underline{\delta_0'(t)\cdot\int_0^{2\pi}dx\cdot\int_0^h dy}}+\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{1k}'(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h dy}+$$

$$+\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{2k}'(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h dy}+\underline{\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{3m}'(t)\cdot\int_0^{2\pi}dx\cdot\int_0^h\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy}=$$

$$=(-1)\cdot\frac{1}{a_1}\cdot\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot u_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx-$$

$$-\delta_0(t)\cdot\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot u_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx-$$

$$-\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1k}(t)\cdot u_{1n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx-$$

$$-\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{2k}(t)\cdot u_{1n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}k\cdot\delta_{3m}(t)\cdot u_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$

$$+\frac{1}{a_1}\cdot\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot u_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx+$$

$$+\delta_0(t)\cdot\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot u_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx+$$

$$+\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1k}(t)\cdot u_{2n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx+$$

$$+\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{2k}(t)\cdot u_{2n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}k\cdot\delta_{3m}(t)\cdot u_{2k}(t)\cdot\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx+$$

$$+\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx+$$

$$+\delta_0(t)\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{1k}(t)\cdot\upsilon_{1n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{2k}(t)\cdot\upsilon_{1n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{3m}(t)\cdot\upsilon_{1k}(t)\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx+$$

$$+\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx+$$

$$+\delta_0(t)\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{1k}(t)\cdot\upsilon_{2n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{2k}(t)\cdot\upsilon_{2n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{3m}(t)\cdot\upsilon_{2k}(t)\cdot\int_0^h\cos(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx+$$

$$+\frac{1}{a_1}\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^{2\pi}dx\cdot\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\int_0^h\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$

$$+\delta_0(t)\cdot\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^{2\pi}dx\cdot\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\int_0^h\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\delta_{1k}(t)\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\delta_{2k}(t)\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$

$$+\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^{2\pi}dx\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{3m}(t)\cdot\upsilon_{3n}(t)\cdot\int_0^h\cos(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$

$$+\frac{4a_2}{9\mu_0}\int_0^h y^2dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\delta_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx+$$

$$+\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1n}(t)\cdot u_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx+$$

$$+\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{1n}(t)\cdot u_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}k\cdot\delta_{1k}(t)\cdot u_{3m}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy-$$

$$-\frac{4a_2}{9\mu_0}\int_0^h y^2dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\delta_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx-$$

$$-\int_0^h\sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\delta_{2n}(t)\cdot u_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx-$$

$$-\int_0^h \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{2n}(t)\cdot u_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx-$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k\cdot\delta_{2k}(t)\cdot u_{3m}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h \sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$
$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\upsilon_{1k}(t)\cdot\delta_{3m}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$
$$+\frac{\pi}{h}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot\upsilon_{2k}(t)\cdot\delta_{3m}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)dx\cdot\int_0^h \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$
$$+\int_0^{2\pi} dx\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\upsilon_{3m}(t)\cdot\delta_{3n}(t)\cdot\int_0^h \sin(m\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy;$$

Одной чертой выделены слагаемые, интегралы в которых равны нулю, при любых $k,n,m=0,12,...$, а так как слагаемые состоят из произведения множителей, то все слагаемое равно нулю, при любых $k,n,m=0,12,....$

Двумя чертами выделены слагаемые, интегралы в которых не равны нулю, при любых $k,n,m=0,12,...$, следовательно и сами слагаемые могут быть не нулями.

Выпишем слагаемые, в которых интегралы не будут равны нулю, при любых $k,n,m=0,12,...$,:

$$\delta_0'(t)\cdot\int_0^{2\pi}dx\cdot\int_0^h dy=-\int_0^h \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{2k}(t)\cdot u_{1n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx+$$
$$+\int_0^h \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{1k}(t)\cdot u_{2n}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx+$$
$$+\frac{\pi}{h}\cdot\int_0^{2\pi}dx\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{3k}(t)\cdot\upsilon_{3n}(t)\cdot\int_0^h \cos(k\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\cos(n\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy+$$
$$+\int_0^h \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{1n}(t)\cdot u_{2k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\sin(k\cdot x)\cdot\sin(n\cdot x)dx-$$
$$-\int_0^h \sin(\frac{\pi}{h}\cdot y)dy\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{2n}(t)\cdot u_{1k}(t)\cdot\int_0^{2\pi}\cos(k\cdot x)\cdot\cos(n\cdot x)dx+$$
$$+\int_0^{2\pi}dx\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\upsilon_{3k}(t)\cdot\delta_{3n}(t)\cdot\int_0^h \sin(k\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)\cdot\sin(n\cdot\frac{\pi}{h}\cdot y)dy;$$

Вычислим интегралы:

$$2\pi\cdot h\cdot\delta_0'(t)=-(-\frac{2h}{\pi})\cdot\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{2n}(t)\cdot u_{1n}(t)+(-\frac{2h}{\pi})\cdot\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{1n}(t)\cdot u_{2n}(t)+$$
$$\frac{\pi}{h}\cdot 2\pi\cdot\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{3n}(t)\cdot\upsilon_{3n}(t)+(-\frac{2h}{\pi})\cdot\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{1n}(t)\cdot u_{2n}(t)-$$
$$-(-\frac{2h}{\pi})\cdot\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\delta_{2n}(t)\cdot u_{1n}(t)+2\pi\cdot\pi\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\upsilon_{3n}(t)\cdot\delta_{3n}(t);$$

Выполним элементарные преобразования:

$$2\pi \cdot h \cdot \delta_0'(t) = 2h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{2n}(t) \cdot u_{1n}(t) - 2h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{1n}(t) \cdot u_{2n}(t) + \frac{2\pi^3}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{3n}(t) \cdot \upsilon_{3n}(t) -$$

$$-2h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{1n}(t) \cdot u_{2n}(t) + 2h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{2n}(t) \cdot u_{1n}(t) + 2\pi^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \upsilon_{3n}(t) \cdot \delta_{3n}(t);$$

Разделив обе части уравнения на ,2g h получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для : $\delta_0'(t)$

$$\delta_0'(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{2n}(t) \cdot u_{1n}(t) - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{1n}(t) \cdot u_{2n}(t) + \frac{\pi^2}{h^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{3n}(t) \cdot \upsilon_{3n}(t) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{1n}(t) \cdot u_{2n}(t) + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \delta_{2n}(t) \cdot u_{1n}(t) + \frac{\pi}{h} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \upsilon_{3n}(t) \cdot \delta_{3n}(t);$$

Далее, действуя по данному алгоритму находятся бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов

$$\delta_{1k}(t),\ \delta_{2k}(t),\ \delta_{3m}(t),\ u_{1k}(t),\ u_{2k}(t),\ u_{3m}(t),\ \upsilon_{1k}(t),\ \upsilon_{2k}(t),\ \upsilon_{3m}(t),\ p_0(t),\ p_{1k}(t),\ p_{2k}(t),\ p_{3m}(t)$$

рядов (9).

Благодарю моего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора, Сергея Петровича Баутина за всестороннюю поддержку в научной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П. Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука, 2014. 91 с.
2. Баутин С.П. Замыслов В.Е. Представление приближенных решений полной системы уравнений Навье-Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 3. С. 3–12. ISSN 1560-7534.
3. Баутин С.П. Замыслов В.Е. Одномерные периодические течения вязкого теплопроводного газа // Вестник УрГУПС. 2013. Т. 17, № 1(17). С. 4–13. ISSN 2079-0392.