DOI 10.37882/2500-3682.2025.04.12

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КРИЗИСОВ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ СВЯЗЬ С ВОЗНИКНОВЕНИЕМ ПАРАДОКСОВ

METHODOLOGICAL FOUNDATIONS OF CRISES IN MATHEMATICS AND THEIR CONNECTION WITH THE EMERGENCE OF PARADOXES

E. Pak

Summary: The article is devoted to the problems of substantiating the foundations of mathematics and their resolution. This issue is considered from the point of view of the close connection between the crises of mathematics and the paradoxes that arise at a certain historical stage. The first two crises were successfully overcome by improving the mathematical apparatus: by introducing restrictions or additions. At this stage, the third crisis has worsened due to the rapid development of computing technology and artificial intelligence, in particular.

Keywords: mathematics, crises, paradoxes, foundations of mathematics, artificial intelligence.

Пак Элла Ефимовна
к. ф.-м. н., Санкт-Петербургский Государственный Морской Технический Университет
pakella779@gmail.com

Аннотация: Статья посвящена проблемам обоснования оснований математики и их разрешению. Этот вопрос рассматривается с точки зрения тесной связи кризисов математики с возникающими на определенном историческом этапе парадоксами. Первые два кризиса были успешно преодолены с помощью усовершенствования математического аппарата: введением ограничений или дополнений. На данном этапе, третий кризис обострился в связи с бурным развитием вычислительной техники и искусственного интеллекта, в частности.

Ключевые слова: математика, кризисы, парадоксы, основания математики, искусственный интеллект.

Введение

Математизация науки в условиях современного научно-технического прогресса является объективной закономерностью ее развития. Недостаточная разработанность философских проблем математики служит питательной средой для метафизических заблуждений и идеалистических толкований. Особенно интенсивно это проявлялось в периоды кризисов методологических основ математики, когда на первый план выдвигались вопросы обоснования математики, философские проблемы этой науки. В эти периоды интерес к математике усиливался, так что в итоге кризисы оборачивались своеобразным стимулом ее дальнейшего развития.

Начальным толчком данных кризисов, с моей точки зрения, служили истинные парадоксы (в отличие от тех парадоксов, которые возникают из-за несовершенства нашей интуиции), то есть логически противоречивые конструкции, возникающие в нечетко сформулированных аксиоматических системах (без необходимых «запретов»). Эти истинные парадоксы играют важнейшую роль в развитии математики, так как их устранение требует переустройства основ и ставит здание соответствующей математической дисциплины на более надежный фундамент.

Имеется достаточное количество литературы, касающееся философских проблем математики, но в ней не рассматриваются в комплексе проблемы данной статьи. Хотя, в некоторых изданиях, например, в [1], частично затрагивается проблема кризисов основ математики.

Работы [2], [3], [4], [5], [6] содержат в себе лишь дискретные моменты описания истории математики. В работах [7], [8], [9] мы можем найти такие философские проблемы математики как непрерывность и дискретность, устойчивость и изменяемость, конечное и бесконечное.

Таким образом, цель данной работы – собрать воедино и обобщить весь этот материал, и рассмотреть ещё раз кризисы в математике, но уже в тесной их взаимосвязи с парадоксами, возникающими на определенных этапах развития математики.

1. Парадокс – случайность или закономерность?

В истории математики можно рассматривать четыре основных этапа: период первоначального накопления математических знаний, период элементарной математики, период математики переменных величин и современный этап развития математики ([9]).

Эту периодизацию интересно рассмотреть в плане проблемы дискретного и непрерывного. Если два первых этапа свидетельствуют о четком различении дискретного и непрерывного в математике (числа и фигуры, в частности), то уже в период создания дифференциального и интегрального исчисления наблюдается некоторое сближение дискретного с непрерывным, хотя второй кризис методологических основ математики опять-таки показал принципиальную несводимость непрерывного к дискретному. При дальнейшем развитии математики эта тенденция просматривается еще более явно, например, получившая распространение теория множеств не исчерпывается областью дискретного.

Прерывно-непрерывный процесс мышления, в котором адекватно отображаются явления внешней действительности, осуществляется в дискретных по своей форме сложных знаках – словах естественного языка и, таким образом, формальная логика имеет дело с понятиями, суждениями и умозаключениями, как с чем-то неизменным и дискретным. Данное реальное противоречие языка и мышления, являющееся главной причиной основного различия между диалектической и формальной логикой порождает парадоксы не только в логике, но и в математике. (В математике это обусловлено тем, что логика выступает способом построения математических дисциплин, инструментом, средством аксиоматического метода). Действительно, в движении понятий, в мыслительной деятельности субъекта схватывается движение, присущее всем без исключения объектам внешнего мира. Но в силу особенностей формальной логики, правила которой должны выполняться в каждом акте мышления, происходит раздвоение единого на противоположности, фиксация отдельных сторон движения, выделение момента устойчивости и дискретности в прерывно-непрерывных процессах стохастической природы, что и приводит к возникновению противоречий, парадоксов в частности.

Таким образом, следует, что парадоксы – явление вполне закономерное и в этом смысле неизбежное в логике и математике, а не что-то случайное, и что только в результате философского анализа можно дать верное теоретическое объяснение, обоснование парадоксов и одновременно указать пути их возможного преодоления.

В конечном итоге, причиной парадоксов в математике является альтернативный характер дискретного и непрерывного в ней (число и множество с одной стороны, фигуры и функции – с другой стороны). Существует самая тесная связь кризисов основ математики с этой альтернативой. Поэтому рассмотрим все три кризиса.

2. Апории Зенона (первый кризис в математике)

Этот кризис возник в результате обнаружения несоизмеримости отрезков. Возможно, что это открытие было сделано в связи с исследованием геометрического среднего $a{:}b = b{:}c$, что интересовало пифагорейцев и служило признаком аристократии. Чему равно геометрическое среднее единицы и двойки? Это вело к изучению отношения стороны и диагонали квадрата, и было обнаружено, что такое отношение не выражается числом, то есть тем, что мы называем рациональным числом (целым или дробью), а только такие числа допускались пифагорейской арифметикой.

Возможно, что при доказательстве несоизмеримости отрезков Пифагор пользовался методом доказательства от противного. Допустим, что это отношение (стороны и диагонали квадрата) равно p:q, где целые числа p и q мы всегда можем считать взаимно простыми. Тогда, из теоремы Пифагора $q^2 = 2p^2$. Следовательно, q^2, а с ним и q – четное число, и пусть $q = 2r$. Тогда $p^2 = 2r^2$, а значит и p – четное. Но из нашего предположения следует, что p должно быть нечетным. Получили противоречие. Такое противоречие разрешалось не расширением понятия числа, а тем, что теория чисел для таких случаев отвергалась, синтез же искали в геометрии. ([6])

Открытие несоизмеримости отрезков вызвало удивление ученых древнего мира, поскольку до тех пор пифагорейцы полагали, что любые два отрезка имеют общую числовую меру, хотя бы и очень малую. К тому же система рациональных чисел всюду плотно покрывала числовую ось и на ней, по мнению древних математиков, не оставалось места для чисел, которые впоследствии были названы иррациональными.

Таким образом, затруднения ученых античного периода дали мощный толчок развитию математики. Кризис основ математической науки обернулся для нее стимулом дальнейшего развития. Сам же факт несоизмеримости отрезков есть выражение невозможности свести непрерывное к дискретному.

Параллельно с этим кризисом целый ряд парадоксов был выявлен в логике, как правило, тесно связанный с представлениями о непрерывном и бесконечном. У Зенона Элейского (родился около 450 года до н.э.) их насчитывалось 45 (до нас дошло только девять). Ранее всегда считали, что сумму бесконечно малых величин можно сделать сколь угодно большой, даже если каждая величина крайне мала ($\infty \times \varepsilon = \infty$). Критика Зенона была направлена против таких представлений. Наиболее известны его парадоксы Ахиллес, Стрела, Дихотомия, Стадион.

Рассмотрим парадокс «Дихотомия» ([6]). Допустим, что мы хотим пройти от пункта A до пункта B по прямой. Чтобы достичь пункта B, нам надо сначала пройти половину расстояния $AB - AB_1$. Чтобы достичь B_1, мы должны сначала достичь B_2 на полпути от A до B_1, и так до бесконечности, так что движение никогда не может начаться. Математически парадокс «Дихотомия» может быть выражен прогрессией:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

Самой сложной для философского объяснения является апория «Покоящаяся стрела», так как основной вывод, который в виде парадокса делается из анализа этой апории, вступает в противоречие с формально-логическим законом недопустимости противоречия (тело и находится в этой точке и не находится в ней). В основе этого утверждения лежало соображение, что если предположить время разделенным на бесконечное число элементарных частей – «настоящих моментов», то в каждый момент стрела должна находиться в совершенно определенном месте, то есть покое. А так как время состоит из суммы таких моментов, то, следовательно, стрела постоянно находится в покое ([2]).

Очевидно, что во всех таких случаях формальная логика фиксирует момент устойчивости и дискретности реального движения так что адекватного движения объекта не получается; траектория движения не может быть представлена суммой покоящихся точек; не имеющие протяженности точки не могут образовывать линию, которая обладает протяженностью.

Усилиями Теэтета, Евклида, Евдокса (который развил общую теорию пропорций как геометрический эквивалент теории положительных вещественных чисел и разработал метод исчерпывания – зачаточную форму теории пределов) кризис основ математики был преодолён (для уровня математики того периода), и математическое знание вновь обрело былую прочность.

Укажем суть метода исчерпывания Евдокса ([5]). «Круги будут друг к другу как квадраты на диаметрах», то есть площади двух кругов относятся между собой как квадраты их диаметров. Доказывается, что разность между площадью круга и площадью вписанного многоугольника, члена последовательности, может быть сделана меньше произвольного наперёд заданного $\varepsilon > 0$. В указанном доказательстве как бы исчерпывается пространство, заключенное между всевозрастающими вписанными многоугольниками и кругом, что и побудило учёных XVII века назвать этот способ методом исчерпывания.

3. Проблема бесконечно малых (второй кризис в математике)

Этот кризис разразился в конце XVII – начале XVIII века. Он возник в ходе попыток обосновать исчисление бесконечно малых, которое было создано в XVII веке. Начало этому этапу развития математики положил Декарт. Он ввёл в математику не только систему координат, но и переменную величину, чем заложил основы аналитической геометрии. Дифференциальное и интегральное исчисление выросло из тех представлений, которые в общем виде сформулировал Декарт.

Благодаря введению переменной величины, появилась необходимость и возможность создания дифференциального и интегрального исчисления, которое было завершено Ньютоном и Лейбницем

Но Ньютон и Лейбниц не смогли полностью обосновать основные понятия математического анализа. Сначала Ньютон употреблял неделимые, бесконечно малые и оперировал ими. Однако постепенно убедился в недостаточной строгости понятия бесконечно малого и стремился к полному изгнанию его из анализа, разработав теорию пределов, названную им «методом первых и последних соотношений». Само понятие предела носит у Ньютона ещё нечёткий, двойственный характер.

Функцию Ньютон называет флюентой, то есть текущей величиной, производную же – флюксией. Ньютон обозначил функции последними буквами латинского алфавита x, y, z, а их флюксии, то есть производные от флюент по времени, – соответственно теми же буквами с точкой над ними: . Бесконечно малые у Ньютона являются «моментами флюксий» и обозначаются через , где o – «бесконечно малое количество». Пример того, как Ньютон находил производные, можно посмотреть, например в [6]. Этот пример показывает, что Ньютон первоначально считал свои производные скоростями, но он показывает также, что способ выражения Ньютона не был вполне определенным. Являются ли символы «o» нулями? или бесконечно малыми? или это конечные числа? В трудах Ньютона, с одной стороны, имеются высказывания, свидетельствующие о том, что он понимал «неделимые», то есть бесконечно малые, как переменные величины, пределом которых служит нуль. В других местах своих произведений, он не всегда придерживался этого взгляда и, поэтому, не сумел уточнить понятие предела, и согласовать его с понятием бесконечно малого.

У Лейбница под бесконечно малой понималась какая-то, хотя и очень малая, но всё же конечная, постоянная величина, которая с одной стороны, должна была быть меньше всякой другой конечной величины, с другой – не равной нулю. Это, так называемое, актуальное бесконечно малое носило противоречивый двойственный характер. Так, например, в анализе Лейбница, с одной стороны, из бесконечного числа бесконечно малых величин складываются конечные величины, откуда логически следовало бы, что бесконечно малое – не нуль. С другой же стороны, сумма конечной величины a с бесконечно малой есть опять a, что отождествляет бесконечно малое с нулем ([5]).

Важно здесь то, что в случае дифференциального и интегрального исчисления, как двух противоположных математических действий, в явном или неявном виде производится как бы сведение непрерывного к дискретному путем использования бесконечно малых величин. Перед математиками вновь встает проблема дискретного и непрерывного, так как математические операции и в этом случае по существу, показывают невозможность полностью стереть грань между дискретным и непрерывным, хотя в теоретических и практических целях математический анализ оказывается весьма эффективным.

Выход из второго кризиса оснований математики заключался в создании теории пределов (О. Коши). Была осуществлена арифметизация основных, исходных понятий анализа (производная, дифференциал, интеграл, непрерывность и т.п.). На математическом языке достаточно строго было сформулировано понятие предела последовательности, которое легло в основу дифференциального и интегрального исчисления. Основные систематические курсы Коши – «Курс анализа» (алгебраический анализ) и «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых».

Так, последовательность a_n имеет своим пределом число a при n стремящемся к бесконечности ($n \to \infty$), когда сколь угодно малому числу   можно поставить в соответствие такое целое число N (зависящее от ε), что неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ выполняется для всех n, удовлетворяющих условию $n \geq N$.

Данное определение предела последовательности легко обобщается и на случай функции. Коши, на основании введенного им понятия о бесконечно малых величинах, установил следующее определение непрерывности функции: функция непрерывна, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции ([2]).

Основы математического знания снова стали казаться прочными и незыблемыми. Существенно, что в случае операции предельного перехода, когда нуль рассматривается как предел, к которому стремится бесконечно малая величина, в явном виде используется абстракция потенциальной бесконечности. Понятие бесконечности в неявном виде используется при арифметизации анализа (работы К. Вейерштрасса и др.). Все это свидетельствует о том, что разрешение второго кризиса методологических основ математики тоже было относительным и временным. Более того, второй кризис фактически перерос в третий.

Если античные математики в ходе преодоления первого кризиса шли в направлении от арифметики к геометрии, то здесь мы имеем противоположное движение от геометрии к арифметике. Общая задача в целом осталась прежней – осуществление органического соединения арифметики и геометрии, предполагающего обращение к понятию бесконечности, преодоление пропасти между ними.

Процесс своеобразной исключения геометрических представлений интуитивного порядка шел по линии не только арифметизации исчисления бесконечно малых, но и создания неевклидовых геометрий, а также полуформальной аксиоматизации геометрии Евклида (Гильберт, Пеано и другие). В итоге, такое развитие математики привело к необходимости использовать теорию множеств, которая становится общепризнанной основой современного математического знания. Как отмечено у Бурбаки «модели, опирающиеся на арифметику, приобретают еще большее значение вследствие расширения аксиоматического метода».

4. Брить или не брить? (третий кризис в математике)

В связи с возникновением и развитием теории множеств, использованием ее в большинстве математических теорий, начался третий кризис основ математики. Это произошло на рубеже XIX – XX веков. Однако, по мнению самих математиков, этот кризис до сих пор не нашел своего удовлетворительного разрешения.

Третий кризис выразился в парадоксах теории множеств, которые впервые были обнаружены итальянцем И. Бурали-Форти (1879 г.), а через два года и самим Г. Кантором – основателем общей теории множеств. Оперируя с бесконечными (необыкновенными) множествами, Кантор нашел, что в подобных случаях часть равна целому, что уже само по себе парадоксально.

Пусть N – множество всех возможных множеств, а C – множество всех подмножеств множества N. Поскольку мощность множества всех подмножеств любого множества имеет мощность, большую мощности этого множества, то мощность C должна быть больше мощности N. Но множество N есть множество всех возможных подмножеств, стало быть, C является подмножеством N. Мощность подмножества не больше мощности множества, следовательно, мощность C не больше мощности N.

Кантор не опубликовал обнаруженного им парадокса. О нем стало известно общественности лишь в 1932 году после того, как была опубликована переписка Кантора ([1]).

В 1902 году в теории множеств Расселом был обнаружен парадокс ещё более общего плана, основанный на одном лишь определении множества. Этот парадокс окончательно подорвал веру математиков в прочность методологических основ своей науки. Опишем этот парадокс. Известно, что множества либо являются элементами самих себя, либо нет. Например, множество всех множеств само есть множество, а множество всех книг данной библиотеки книгой не является. Пусть M – множество всех множеств, которые являются элементами самих себя, а N – множество всех множеств, которые элементами самих себя не являются. Возникает вопрос, является ли N элементом самого себя? Если оно является элементом самого себя, то оно есть элемент M, а не N. В силу этого оно не является элементом самого себя и является элементом N, а не M, то есть является элементом самого себя.

Позже парадокс Рассела популяризовался в самых различных вариантах. Сам Рассел разъяснял его на примере парикмахера деревни, который взял на себя обязательство брить всех, кто не бреется сам, и не брить тех, кто бреется сам. Ведь если он будет брить себя сам, то нарушит условие – не брить тех, кто бреется сам, а если он не будет брить себя, то опять-таки придет в противоречие с взятым обязательством – брить тех, кто не бреется сам. На лицо явный парадокс, неразрешимое противоречие.

Интересно, что такого рода логические парадоксы были известны еще древним грекам (например, парадокс «Лжец»), что свидетельствует о единой природе логических и теоретико-множественных парадоксов, а также о том, что зачатки и второго, и третьего кризисов, имели место ещё в период становления математики как науки. Таким образом, все кризисы можно рассматривать как этапы одного и того же кризиса методологических основ математики.

Так, Гильберт писал: «Состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике – этом образце достоверности и истинности – образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводит к нелепости. Где же искать надежность и истинность критскому философу, если даже само математическое мышление дает осечку?» ([1]).

В ряду многочисленных способов и методов, которые могли бы помочь как-то избежать подобных парадоксов и в какой-то мере объяснить их, наибольшего внимания заслуживает требование Рассела исключить из математики и логики так называемые, импредикативные предложения, в которых определение элемента m из множества C зависит от последнего. Такое предложение Рассела основывается на том, что в случае импредикативных определений мы имеем нечто подобное порочному логическому кругу. В своем «принципе порочного круга» Рассел формулирует правило, по которому «никакое множество C не может содержать элементов m, определяемых лишь в терминах множества C, а также элементов m, предполагающих в своем определении это множество». Короче говоря, правило Рассела запрещает использование множеств, которые являются элементами самих себя.

Подобное суживание понятия множества необходимо для того, чтобы избежать теоретико-множественных и родственных им (то есть тех, которые связаны с использованием понятия бесконечности) логических парадоксов, значительно ограничивает использование теории множеств в математике. Но главное заключается в том, что исключение импредикативных определений помогает главным образом избежать парадоксов, но недостаточно для глубокого теоретического объяснения природы и подлинных причин парадоксов, коренящихся в особенностях традиционной формальной логики.

Возможно, что ответ на вопрос о природе парадоксов, антиномий и апорий следует искать в более тщательном анализе особенностей формальной логики, которая является необходимым компонентом математических построений наукой о последовательном и непротиворечивом мышлении. Еще раз отметим, что конечной причиной всех парадоксов является то, что формальная логика фиксирует в реальном движении понятий только одну из противоположных сторон движения – момент устойчивости и дискретности. Это и ведет к невозможности адекватно отразить средствами формальной логики движения понятий, а в конечном итоге – к противоречиям, именуемым парадоксами.

Как и предыдущие кризисы – этот кризис послужил мощным толчком к интенсивному анализу математического знания, к последующему более тщательному обоснованию этой отрасли науки.

Непосредственной причиной последнего кризиса является формально-логическая противоречивость канторовской теории множеств. Однако, здесь более глубокая причина, которая носит гносеологический характер. Эта причина состояла в том, что гносеологические основания теории множеств включали слишком сильные принципы идеализации, допускающие образование объектов «произвольной природы», в том числе каких угодно множеств.

На основе подобных гносеологических принципов формировались исходные абстракции теории множеств. А на базе явных определений этих абстракций аналитическим методом усматривалась истинность предложений теории множеств, в том числе и ее исходных предложений (аксиом), то есть собственных оснований теории множеств. Ввиду того, что эти основания сами оказались необоснованными из-за возможности вывести из них противоречие, они требовали существенных изменений. Эти изменения приводят к необходимости изменения гносеологических оснований теории множеств, то есть изменения принципов идеализации, применяемых этой теорией для образования своих объектов ([10]).

Если бы в теории множеств удалось приемлемым образом с логической и гносеологической точек зрения устранить парадокс Рассела, то это еще не свидетельствовало бы об обосновании ее непротиворечивости. Проблема обоснования теории множеств все равно осталась бы открытой и не было бы гарантий, что теория множеств не содержит противоречий. На практике (в приложениях теории множеств) пользуются такими множествами, определения которых к противоречиям не приводили. Например, математика изучает различного рода конечные и бесконечные множества (множества действительных чисел, множества точек, называемых линиями, плоскостями, геометрическими фигурами и т.п.). Однако в предмет математических теорий не входит изучение множества всех множеств, не содержащих себя в качестве своего элемента.

5. ИИ. Что дальше?

В настоящее время во многих сферах человеческой деятельности на первый план выходит развитие и использование искусственного интеллекта (ИИ). Трудно переоценить вклад ИИ в современную жизнь. Для развития и успешной реализации ИИ требуется создание стабильных и точных нейронных сетей. И тут, вдруг, ученые столкнулись с проблемой, которая заключается в том, что многие системы ИИ не могут оценивать случаи, когда они допускают ошибки. Таким образом, невозможно вычислить точную нейронную сеть независимо от количества обучающих данных.

В последнее время появился ряд работ, пытающихся осмыслить данный феномен или найти пути хотя бы частичного разрешения проблемы (например, [10]). В связи с данной темой очень интересной и аргументированной представляется статья [11]. Авторы статьи приводят примеры тех областей (например, медицины), где ошибки ИИ являются недопустимыми. Оказывается, в общем случае, нет никакого способа узнать, когда системы ИИ более или менее уверены в своем решении.

Выяснилось, что эта проблема тесно связана с парадоксами, описанными Гёделем и Тьюрингом. Так, Курт Гёдель еще в 1931 году ([12]) сформулировал теорему о неполноте. Один из вариантов этой теоремы заключается в том, что для любой непротиворечивой системы, в рамках которой может быть выполнено определенное количество элементарных арифметических действий, непротиворечивость этой системы не может быть доказана в самой этой системе.

С выводами Гёделя перекликаются исследования Алана Тьюринга ([13]), который в 1936 году доказал, что существуют такие вычислительные задачи, которые невозможно решить даже с помощью сколь угодно мощной вычислительной техникой и при неограниченном времени. Это так называемая «неразрешимость проблемы остановки», то есть Тьюринг доказал отсутствие алгоритма, который мог бы решить задачу остановки машины для любой программы. А остановка машины Тьюринга как раз и означала бы решение задачи и получение ответа.

Опираясь на выводы Гёделя и Тьюринга, американский математик Стивен Смейл ([14]) в конце XX века в числе сформулированных им важных математических проблем, под номером 18 сформулировал следующую проблему: каковы пределы интеллекта – как искусственного, так и человека? Исследователи показали, что существуют ограничения на алгоритмы обучения стабильных нейронных сетей. Итог таких рассуждений выливаются в следующий парадокс. Есть хорошо обусловленные задачи, в которых существуют точные нейронные сети, но ни один алгоритм не может их вычислить. На данном этапе развития науки эту проблему пытаются обойти в отдельных случаях. В частности, авторы статьи [11] описывают условия, необходимые для существования алгоритмов, которые могут вычислять стабильные и точные нейронные сети. В глобальном же плане этот парадокс остается на данный момент неразрешенным.

Будет ли описанная проблема полностью решена и даст ли это толчок развития математики и переход на следующий этап? Пока вопрос остается открытым.

Заключение

Получившая в условиях научно-технической революции наибольшее развитие и использование дискретная математика органически связана с традиционной формальной логикой. Обе они фиксируют момент дискретности и устойчивости понятийного мышления, вынужденно огрубляя тем самым и познаваемые процессы действительности (без такого огрубления изучаемого явления человек не в состоянии выразить движение). Такой вынужденный прием проявляется в «дуализме» языка и мышления, в том, что прерывно-непрерывный процесс мышления подобно лаве застывает в дискретных знаках, словах естественного языка. Указанное огрубление должно сниматься диалектической логикой.

В ходе формализации научного знания часть содержания высказываний неизбежно утрачивается, поскольку в этом случае фиксируется не процесс, а результат, вычленяется момент устойчивости и дискретности мыслительной деятельности. Это обстоятельство проявляет дополнительный свет на проблему моделирования мышления с помощью компьютеров, которые являются не чем иным, как технической реализацией результатов формализации. Получается, что формальная логика (и используемая при этом дискретная математика) «останавливает» движение, каковым является понятийное мышление, «квантует» его на дискретные «атомы» («атомарные высказывания»), а затем имитирует движение понятий в урезанном виде – в рамках однозначных зависимостей. То есть, например, с помощью ЭВМ воспроизводится лишь формально-логическая сторона мышления. Понятийное мышление моделируется, имитируется (а не воспроизводится таким, каким оно является у человека): прерывно-непрерывный процесс мышления имеет стохастическую природу, как и отображаемые в нем естественные процессы действительности, и принципиально не может быть воспроизведен в технике, с помощью средств дискретной (либо непрерывной) математики и формальной логики («барьер стохастичности») ([1]).

Вопрос о соотношении дискретного и непрерывного занимает особое, можно сказать ведущее место среди методологических вопросов математики. Все так называемые кризисы основ математики выражают принципиальную невозможность свести одно к другому, полностью преодолеть пропасть между арифметикой и геометрией, в частности. Характерно, что указанные кризисы неизменно выражались в логических или математических парадоксах, что приводило к поискам значительно более совершенных способов обоснования математики, а в итоге – к дальнейшему развитию математического знания.

В настоящее время третий кризис оснований математики не только не преодолен, но и прибавились новые проблемы и возникли новые парадоксы в связи с бурным развитием нейронных сетей и ИИ. На данном этапе развития математической науки эти проблемы решаются путем введения ограничений. В развитии ИИ сейчас та стадия, когда его практические успехи опережают теорию, а значит, нужна разработка концепции по пониманию основ вычислений ИИ. То есть, разработка новых путей для создания систем, которые могут решать проблемы надежным способом, понимая при этом существующие ограничения. Парадоксы ограничений математики и вычислительных машин, выявленные Гёделем и Тьюрингом, привели к появлению теорий основ, описывающих как ограничения, так и возможности математики и вычислений. Теория основ обязательно должна появиться в сфере разработки ИИ. Насколько скоро это произойдет, пока предсказать невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков Н.И. Философские проблемы математики / Н.И. Жуков. –Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 95 с.
2. Болгарский Б.В. Очерки по истории математики / Б.В, Болгарский. – Минск: Высш. школа, 1974. – 287 с.
3. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах / В.Я. Виленкин. – М.: МЦНМО, 2019. – 152 с.
4. Гарднер М. Математические новеллы / М. Гарднер. – М.: Мир, 2000. – 415 с.
5. Глейзер Г.И. История математики в средней школе / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
6. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Д.Я. Стройк. – М.: Наука, 1990. – 251 с.
7. Беляев Е.А. Некоторые особенности развития математического знания / Е.А. Беляев, Н.А. Киселева, В.Я. Перминов. – М., 1975. – 112 с.
8. Слуцкий М.С. Взаимосвязь философии и естествознания / М.С. Слуцкий – М.: Высш. школа, 1973. – 119 с.
9. Мелюхин С.Т. Философские проблемы естествознания / С.Т. Мелюхин, Ю.А. Петров, Г.И. Рузавин и др. – М.: Высш. школа, 1985. – 400 с.
10. Алексеев А.Ю. Парадоксы и противоречия искусственного интеллекта: 90 лет первой теореме К. Гёделя о неполноте и 60 лет аргументу Дж. Лукаса / А.Ю. Алексеев, А.А. Ващенко, А.С. Зайкова // Философия науки и техники. – 2023. – Т. 28. №2. С. 156-169.
11. Colbrook M. The difficulty of computing stable and accurate neural networks: On the barriers of deep learning and Smaile's 18th problem / M. Colbrook, V. Antun, C. Hansen// Proceedings of the national Academy of Science, 119 (12) 2022.
12. K Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. Phys. 38, 173–198 (1931).
13. A. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. Lond. Math. Soc. 42, 230–265 (1936).
14. S. Smale, Mathematical problems for the next century. Math. Intell. 20, 7–15 (1998).

© Пак Элла Ефимовна (pakella779@gmail.com).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»