ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЛНЫ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ В ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ «ХИЩНИК — ЖЕРТВА»

THE APPLICATION OF THE METHOD OF THE WAVE PROBABILITY FOR THE INVESTIGATION OF THE DEATH AND REPRODUCTION PROCESS IN THE ECOLOGICAL SYSTEM OF "PREDATOR — PREY"

D. Zaitsev
O. Shamaeva
N. Shvedov

Summary. The process of death and reproduction in the ecological system of "predator — prey" is investigated in this work. A transition from species of one kind to species of two kinds is created. The application of the method of the wave probability is also shown to this process. A queueing theory is used for the description of the method of the wave probability.

Keywords: Ecological system, the method of the wave probability, the graph, the queueing theory, the species.

Зайцев Дмитрий Викторович
К.т.н., доцент, 12 Центральный научно-исследовательский институт Министерства обороны Российской федерации, Россия, Сергиев Посад-7
Шамаева Ольга Юрьевна
К.т.н., доцент, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия, Москва
Шведов Николай Александрович
Аспирант, Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия, Москва
Shvedovn@gmail.com

Аннотация. В работе исследуется процесс гибели и размножения в экологической системе «хищник — жертва». Построен переход от популяции одного вида к двум. Также показано применение метода волны вероятности к этому процессу. Для описания метода волны вероятности используется теория систем массового обслуживания.

Ключевые слова: Экологическая система, метод волны вероятности, граф, теория систем массового обслуживания, популяции.

Введение

Существует система уравнений А. Лотки — В. Вольтера[1,2], которая описывает процесс гибели и размножения в экологической системе «хищник — жертва». Эта система дифференциальных уравнений требует решения численными методами. В работе предложен метод волны вероятности для исследования процесса гибели и размножения в экологической системе «хищник -жертва». Этот метод является более простым с точки зрения вычислений. Он основан на принципе Гюйгенса — Френеля. При использовании метода волны вероятности строится граф, каждое состояние которого характеризует численности хищников и жертв соответственно. В нем применяются теория игр и теория систем массового обслуживания. Метод волны вероятности для экологической системы «хищник — жертва» получается из метода волны вероятности для экологической системы «хищник — хищник» с добавлением дополнительных измерений графа. Для обоснования применения метода волны вероятности рассмотрим процесс гибели и размножения в теории систем массового обслуживания.

1. Описание процесса гибели и размножения

В теории систем массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов — процессов гибели и размножения [3]. Размеченный граф состояний такого процесса представлен на рисунке 1.

Рассмотрим упорядоченное множество состояний системы $S_0, S_1, \ldots, S_n$. Переходы могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, то есть из состояния S_k возможны переходы только либо в состояние S_{k-1}, либо в состояние S_{k+1}. Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, простейшие с соответствующими интенсивностями λ или μ. По графу, представленному на рисунке 1, обычно составляются и решаются ал-

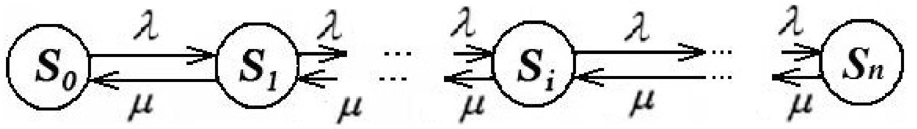

Рис. 1. Граф состояний для процесса гибели и размножения

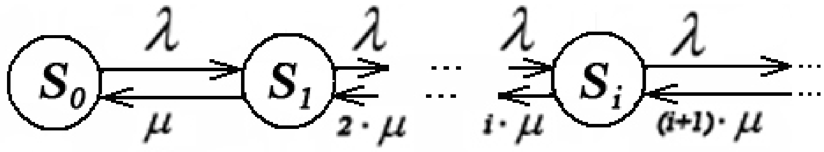

Рис. 2. Граф задачи динамики численности популяций одного вида.

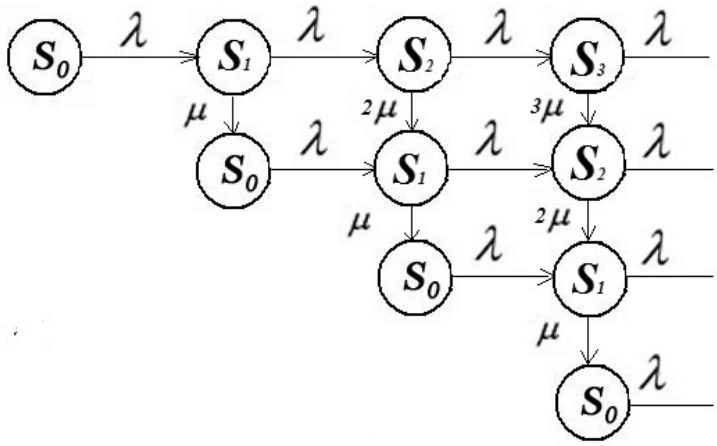

Рис. 3. Преобразованный двухмерный граф задачи динамики численности популяций одного вида (Начальное состояние S0)

гебраические уравнения для предельных вероятностей состояний.

2. Апробация метода волны вероятности на задаче гибели и размножения с дискретными состояниями и непрерывным временем

Рассмотрим метод волны вероятности на примере задачи динамики численности популяций одного вида (хищников и жертв). Пусть увеличение числа особей происходит с постоянной интенсивностью λ, а интенсивность гибели пропорциональна числу особей$i*$μ(- где i-количество особей популяции, а μ — интенсивность гибели). Аналогом такой системы может быть система массового обслуживания с бесконечным числом каналов[4,5]. Граф данной системы представлен на рисунке 2.

Для того чтобы данную задачу можно было решать методом волны вероятности, необходимо добавить к графу ещё одно измерение так, как это показано на рисунке 3.

В результате этого получен граф, в котором при продвижении на одно положение по горизонтали происходит увеличение числа особей одного вида, а при продвижении по вертикали — уменьшение. Если необходимо пронаблюдать систему за некоторый короткий промежуток времени, то в качестве исходной точки S_k выбирается некоторое начальное положение, из которого стартует система. Это показано на рисунке 4.

При наличии дополнительных данных о состоянии системы положение может определяться начальным условием вида $P(S_k) = 1$. Если же необходимо проанализировать, как будет вести себя система в стационар-

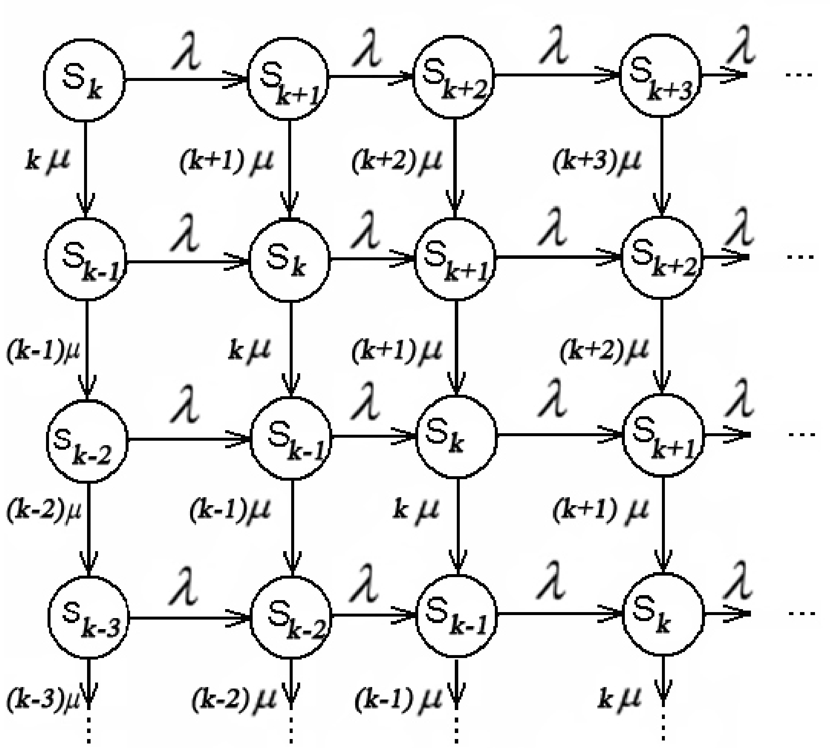

Рис. 4. Преобразованный двухмерный граф задачи динамики численности популяций одного вида (начальное состояние Sk)

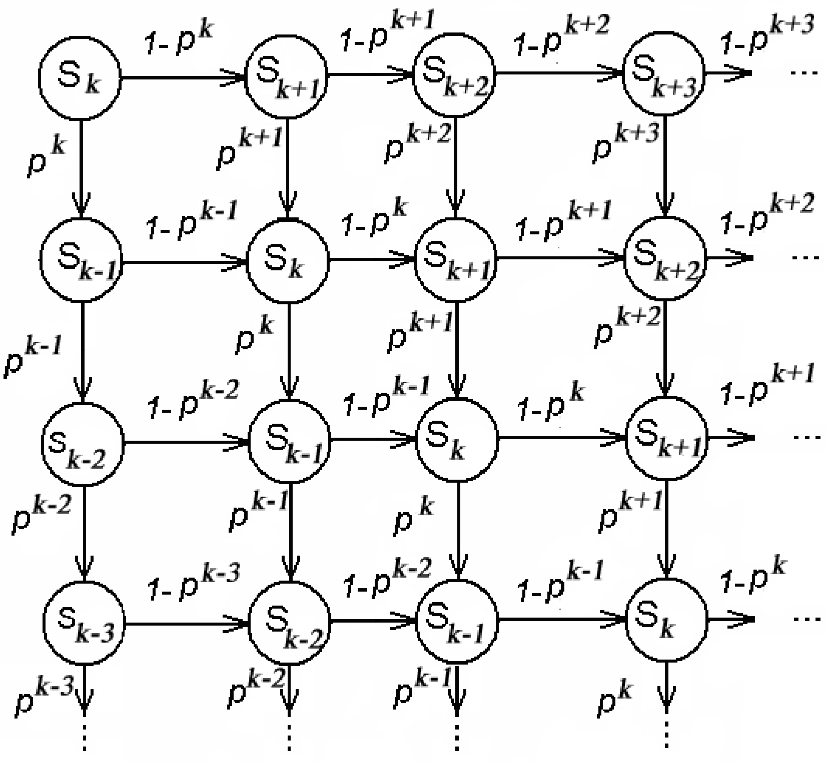

Рис. 5. Граф задачи динамики численности популяции одного вида для расчёта методом волны вероятности.

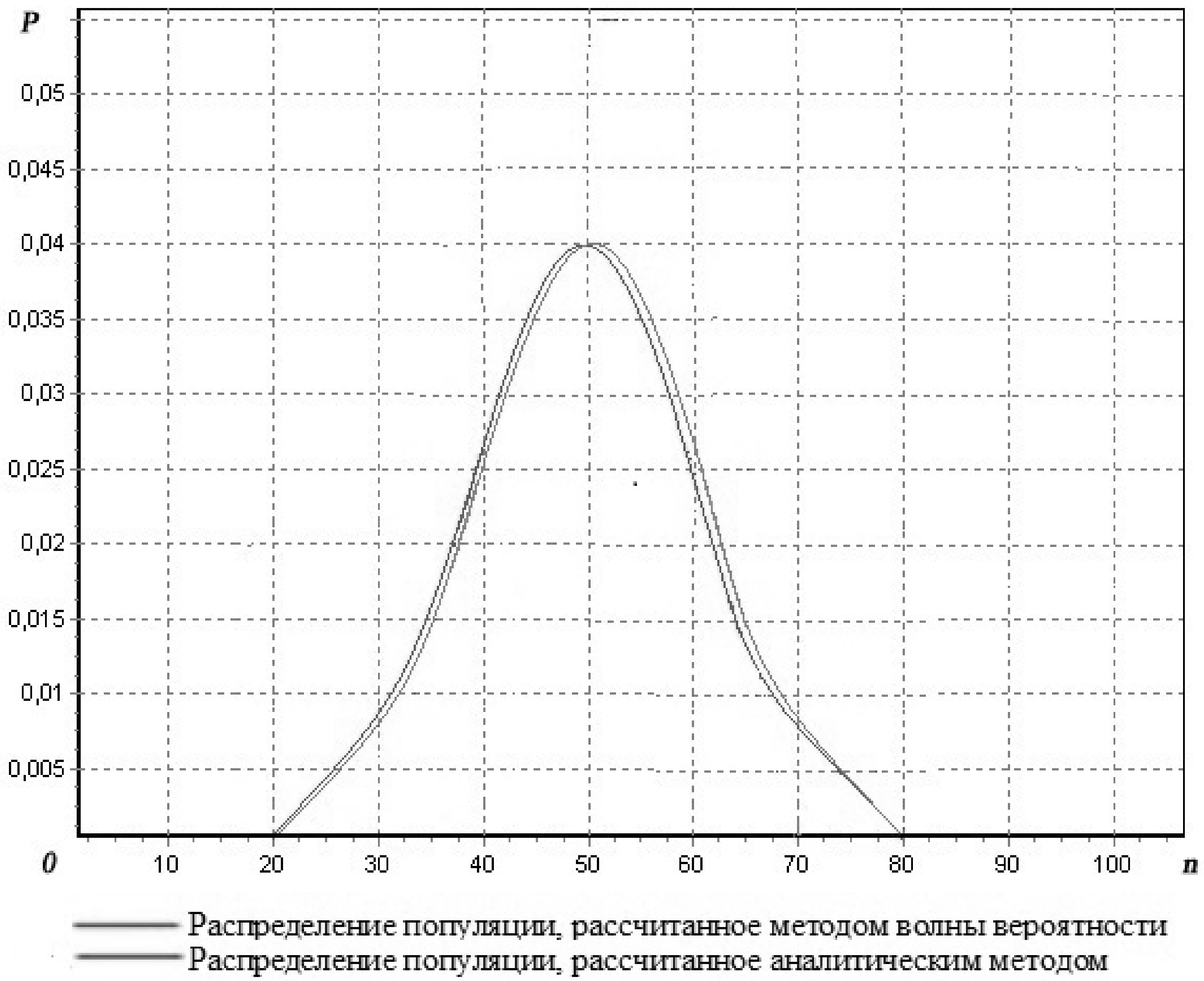

Рис. 6. Сравнение результатов распределений, полученных разными методами

ном режиме, то в качестве k выбирается математическое ожидание количества особей.

После чего интенсивности перехода заменяются вероятностями перехода из данного состояния в каждое из возможных состояний. Далее будут использованы следующие обозначения: P^k — вероятность перехода в состояние с меньшим числом особей. Вероятность P^k рассчитывается по следующей формуле:

$$\begin{cases} P^k = \dfrac{k \cdot \mu}{\lambda + k \cdot \mu}, \quad k > 0; \\ P^k = 0, \quad k \le 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Так как система из k-го положения может перейти либо в $k - 1$-ое, либо в $k + 1$-ое, то вероятность перехода в $k + 1$-ое состояние составляет $1 - P^k$.

Финальный граф для расчёта плотности вероятности состояний изображён на рисунке 5.

Расчёт в графе ведётся по диагоналям, в которых состояния удалены от начального на одинаковое количество шагов. Формула волны вероятности в этом случае имеет вид:

$$P_k^n = (1 - P^{k-1})P_{k-1}^n + P^{k+1}P_{k+1}^n \qquad (2)$$

где P_k^n – вероятность нахождения системы в S_k состоянии после реализации n событий.

В качестве результатов расчёта берутся деленные пополам вероятности нахождения системы в состояниях из последних двух диагоналей. Это позволяет получить гладкое распределение, и сумма полученных вероятностей состояний равна единице.

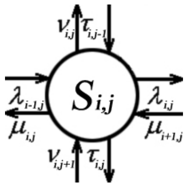

Рис. 7. Фрагмент двухмерного графа экологической системы «хищник — жертва»
Где λ — естественная прибыль жертв при отсутствии хищников, μ — коэффициент, отвечающий за количество жертв, поедаемых хищниками, ν — естественная убыль хищников в отсутствии пищи, τ — прибыль хищников при поедании ими жертв, S_{ij}– состояние системы (i– количество хищников, j — количество жертв).

3. Применение метода волны вероятности для расчета одномерной системы гибели и размножения с дискретными состояниями и непрерывным временем

С помощью описанного выше метода была проведена оценка плотности распределения в задаче гибели и размножения в стационарном режиме. Для расчётов использовались следующие начальные данные: λ = 30 (интенсивность размножения), μ =1 (интенсивность гибели), n от 20 до 80 (численность популяции одного вида)

Результаты расчёта приведены на рисунке 6, где p — вероятности состояний популяции для задачи гибели и размножения, n — численность популяции.

Стабилизация графика распределения наблюдается уже при трёхстах этапах расчёта. Графики распределений, рассчитанных численно и аналитически, практически идентичны. Наблюдается лишь незначительный сдвиг максимума численного распределения в сторону уменьшения числа опытов. Размер сдвига не уменьшается с увеличением числа этапов. Такой сдвиг может быть обусловлен увеличением интенсивности появления событий при увеличении числа особей, не учитываемом в методе волны вероятности.

4 Двухмерный случай системы гибели и размножения с дискретными состояниями и непрерывным временем

Двухмерный случай системы гибели и размножения аналогичен экологической системе «хищник — жертва», где происходит взаимодействие двух популяций, которые гибнут и размножаются. Приведем фрагмент двухмерного графа данной системы на рисунке 7

В случае двухмерного графа выполняется действия аналогичные действиям из раздела 2. Производится удвоение количества измерений графа. Каждой популяции из экологической системы «хищник — жертва» ставится в соответствие два измерения графа. Вдоль одного из них происходит увеличение числа особей, соответствующего вида, а вдоль другого — уменьшение.

Для вероятностей перехода между состояниями справедлива следующая формула:

$$\begin{cases} P^{i,j\to i+1,j} = \dfrac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i,j}+\mu_{i,j}+\tau_{i,j}+\nu_{i,j}}; \\ P^{i,j\to i-1,j} = \dfrac{\mu_{i,j}}{\lambda_{i,j}+\mu_{i,j}+\tau_{i,j}+\nu_{i,j}}; \\ P^{i,j\to i,j+1} = \dfrac{\tau_{i,j}}{\lambda_{i,j}+\mu_{i,j}+\tau_{i,j}+\nu_{i,j}}; \\ P^{i,j\to i,j-1} = \dfrac{\nu_{i,j}}{\lambda_{i,j}+\mu_{i,j}+\tau_{i,j}+\nu_{i,j}}. \end{cases} \tag{3}$$

Формула волны вероятности для двухмерного случая имеет вид:

$$P^n_{i,j} = P^{i-1,j\to i,j}\cdot P^n_{i-1,j} + P^{i+1,j\to i,j}\cdot$$
$$\cdot P^n_{i+1,j} + P^{i,j-1\to i,j}\cdot P^n_{i,j-1} +$$
$$+ P^{i,j+1\to i,j}\cdot P^n_{i,j+1} \tag{4}$$

Далее интенсивности перехода заменяются вероятностями перехода из данного состояния в каждое из возможных состояний.

Выводы

1. Рассмотрена задача динамики численности популяций одного вида (задача гибели и размножения) с дискретными состояниями и непрерывным временем. Показано приме-

нение метода волны вероятности к данной задаче.
2. Дан частный пример динамики численности популяций одного вида, при интенсивности размножения $\lambda = 30$, интенсивности гибели $\mu = 1$ и колебаний численности популяции n (от 20 до 80).
3. Осуществлен переход от одномерного к двухмерному случаю гибели и размножения для нескольких популяций в экологической системе «хищник — жертва». Показано применение метода волны вероятности к данной системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Вольтера.Математическая теория борьбы за существование.— Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 288 стр. Репринтное издание (оригинальное издание: М.: Наука, 1976 г.) Перевод с французского О. Н. Бондаренко под редакцией Ю. М. Свирежева.
2. Lotka A. J. Elements of physical biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. (Переиздание: Elements of mathematical Biology. N.Y.: Dover, 1956).
3. Новиков А. И. Экономико — математические методы и модели.— М.: Издательство — торговая корпорация «Дашков и К0», 2008–532с.
4. Смагин Б. И. Экономико-математические методы М.: Юрайт, 2017–272с.
5. Карташевский В.Г., Основы теории массового обслуживания — М.: Горячая линия — Телеком, 2015–130с.