DOI 10.37882/2223-2966.2026.01.34

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОГО ЧЕТЫРЁХПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КЛАССА ДРОБНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ON THE INTEGRATION OF ONE FOUR-PARAMETER CLASS OF FRACTIONAL-POLYNOMIAL ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Z. Khakimova

Summary. This article discusses various classes of ordinary differential equations of the 2nd order — power, polynomial and fractional-polynomial types. Using the method of discrete invariants and their generalizations, several three-parameter classes of ordinary differential equations with power and polynomial right-hand sides, as well as (for the first time) a four-parameter class of equations with fractional-polynomial right-hand sides, were integrated.
A way is indicated for «multiplying» the found solvable subclasses of equations by a discrete group of transformations in the class of fractional-polynomial ordinary differential equations and obtaining new solvable subclasses of equations.

Keywords: ordinary differential equation, exact solution of an ordinary differential equation, discrete transformation group, dihedral group, invariant of a discrete transformation, concomitant, classes of power, polynomial and fractional-polynomial differential equations.

Хакимова Зиля Наильевна
Кандидат физико-математических наук, доцент, Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского
vka@mil.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются различные классы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка — степенного, полиномиального и дробно-полиномиального вида. С помощью метода дискретных инвариантов и их обобщений проинтегрированы несколько трёхпараметрических классов обыкновенных дифференциальных уравнений со степенными и полиномиальными правыми частями, а также (впервые) четырёхпараметрический класс уравнений с дробно-полиномиальными правыми частями.
Указан путь «размножения» найденных разрешимых подклассов уравнений по дискретной группе преобразований в классе дробно-полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений и получения новых разрешимых подклассов уравнений.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, точное решение обыкновенного дифференциального уравнения, дискретная группа преобразований, группа диэдра, инвариант дискретного преобразования, конкомитант, классы степенных, полиномиальных и дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений.

Введение

Дискретные группы преобразований для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) были открыты В.Ф. Зайцевым в 70-х годах прошлого столетия. Разработанный им дискретно-групповой анализ (ДГА) ОДУ был опубликован в его первых, депонированных, монографиях [1, 2].

ДГА ОДУ дал плоды: были получены точные решения первых сотен новых дифференциальных уравнений, принадлежащих исследуемым классам уравнений [3].

Один из первых классов уравнений, исследованный В.Ф. Зайцевым достаточно полно, — это трёхпараметрический класс обобщённых уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ):

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x \right)^m, \qquad (1)$$

для которого в результате применения ДГА были получены точные решения 99 уравнений и подклассов уравнений.

В работе [4] степенной класс уравнений (1) был обобщён введением четвёртого параметра «n»:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x \right)^m \left(xy'_x - y \right)^n. \qquad (2)$$

Методом «размножения» интегрируемых случаев класса уравнений (1) в работе [4] были найдены несколько сотен разрешимых уравнений и подклассов в классе уравнений (2). Стоит отметить, что среди них оказались и 18 новых разрешимых ОУЭФ (1) [4, 5], точные решения которых опубликованы в справочнике [6]. Таким образом, для получения этих 18 разрешимых уравнений, помимо метода «размножения», использовался также метод «вложения» класса уравнений (1) в расширенный класс уравнений (2).

Кроме метода «размножения», для получения точных решений ОДУ используется также метод дискретных инвариантов. С его помощью были проинтегрированы несколько подклассов классов уравнений 2-го порядка (1) и (2), инвариантных относительно некоторых дискретных преобразований, а также их обобщения [3, 7-12]. Рассматривались также и мультипликативные уравнения 2-го и 3-го порядков, в том числе и с произвольными функциями.

В данной статье с помощью обобщения дискретно-инвариантного преобразования, понижающего порядок уравнений, впервые был получен разрешимый четырёхпараметрический класс уравнений дробно-полиномиального вида. Ранее был найден лишь трёхпараметрический интегрируемый класс уравнений степенного вида [7].

Также в статье найдены два новых интегрируемых трёхпараметрических класса уравнений с полиномиальными правыми частями.

Инвариант преобразования Лежандра

Рассмотрим известное преобразование Лежандра, которое является образующей дискретной циклической группы 2-го порядка:

$$\mathbf{l}: x \rightleftarrows y'_x,\; y \rightleftarrows xy'_x - y,\; \mathbf{l}^2 = \mathbf{E}, \tag{3}$$

где $\mathbf{E}$ — тождественное преобразование.

Это дискретное преобразование замкнуто в классе уравнений (2). Обозначим класс уравнений (2) вектором параметров: $\left(k,l,m,n \mid A\right)$. Тогда

$$\mathbf{l}: \left(k,l,m,n \mid A\right) \to \left(-m,-n,-k,-l \mid \frac{1}{A}\right). \tag{4}$$

Если приравнять соответствующие параметры в (4), то получится $\mathbf{l}$-инвариант в классе уравнений (2) с точностью до коэффициента:

$$y''_{xx} = A\left(\frac{y'_x}{x}\right)^k \left(\frac{xy'_x - y}{y}\right)^l \text{ или } \left(-k,-l,k,l \mid A\right). \tag{5}$$

Исследуем преобразование

$$\mathbf{K_l}: \theta = \frac{y'_x}{x}, V = \frac{xy'_x - y}{y}, \tag{6}$$

являющееся $\mathbf{l}$-*конкомитантом* — согласованным совместным инвариантом преобразования $\mathbf{l}$. Преобразование (6) является инвариантным относительно $\mathbf{l}$ с точностью до инверсии.

Найдём уравнение, которое с помощью преобразования (6) приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\dot{V}_\theta = A\theta^k V^l. \tag{7}$$

Для этого из (6) найдем $\dot{V}_\theta$:

$$\dot{V}_\theta = \frac{xyy''_{xx} - y'_x\left(xy'_x - y\right)}{xy''_{xx} - y'_x}. \tag{8}$$

Подставив (6) и (8) в (7), получим уравнение с дробно-полиномиальной правой частью:

$$\frac{xy''_{xx}}{y'_x} = \frac{Ax^{-k-2}y^{2-l}\left(y'_x\right)^k\left(xy'_x - y\right)^l - \left(xy'_x - y\right)}{Ax^{-k-2}y^{2-l}\left(y'_x\right)^k\left(xy'_x - y\right)^l - y}. \tag{9}$$

Класс уравнений (9) с помощью конкомитанта (6) приводится к классу уравнений с разделяющимися переменными (7).

Для конкомитанта $\mathbf{K_l}$ (6) можно найти обратное преобразование:

$$\mathbf{K_l}^{-1}: x = C_1 e^{\int F d\theta},$$
$$y = C_1^2 \int e^{2\int F d\theta}\theta F d\theta + C_2, F\left(\theta, V\right) = \frac{1 + V - \theta\dot{V}}{\theta\left(V^2 - 1\right)}. \tag{10}$$

Если в (10) подставить общее решение уравнения (7), то получим общее решение уравнения (9).

Этот результат обобщается: вместо уравнения (7) можно взять произвольное разрешимое уравнение 1-го порядка

$$\dot{V}_\theta = f\left(\theta, V\right). \tag{11}$$

Тогда вместо (9) получим уравнение

$$\frac{xy''_{xx}}{y'_x} = \frac{f - \dfrac{xy'_x - y}{y}\cdot\dfrac{x^2}{y}}{f - \dfrac{x^2}{y}}, \tag{12}$$

общее решение которого есть композиция преобразования $\mathbf{K_l}^{-1}$(10) и общего решения уравнения (11).

Нахождение разрешимого четырёхпараметрического класса ОДУ 2-го порядка

В работе [7] был найден конкомитант

$$\mathbf{K_r}: \theta = xy, V = \frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{13}$$

относительно преобразования $\mathbf{r}: x \rightleftarrows y$.

С помощью конкомитанта (13) точный $\mathbf{r}$-инвариант в классе уравнений (2) приводится к уравнению с разделяющимися переменными [7].

Конкомитант $\mathbf{K_r}$ (13) допускает обобщение:

$$\theta = x^{k+1}y^{l+1}, V = \frac{xy'_x - y}{\left(y'_x\right)^{\frac{k+1}{k+l+2}}}. \quad (14)$$

С помощью преобразования (14) трёхпараметрический подкласс класса уравнений (2) также приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l \left(y'_x\right)^{\frac{k(2-n)+l-n+3}{k+l+2}} \left(xy'_x - y\right)^n \to \\ \to \left(k+l+2\right)\dot{V}_\theta = AV^n. \quad (15)$$

Позже для преобразования (14) удалось найти обратное преобразование [8], благодаря чему было найдено общее решение трёхпараметрического класса уравнений (15).

Рассмотрим обобщение преобразования (14):

$$\theta = x^k y^l, V = \left(y'_x\right)^m \left(xy'_x - y\right)^n. \quad (16)$$

Перебирая различные функции f в уравнении с разделяющимися переменными (11), удалось найти функцию $f\left(\theta, V\right) = A\frac{\theta}{V}$ — такую, что к уравнению

$$\dot{V}_\theta = A\frac{\theta}{V}. \quad (17)$$

с помощью преобразования (16) приводится четырёхпараметрический класс уравнений:

$$y''_{xx} = \\ = \frac{Al}{m+n}\frac{x^{2k-1}y^{2l-1}\left(y'_x\right)^{1-2m}\left(xy'_x - y\right)^{1-2n}\left(xy'_x + \frac{k}{l}y\right)}{xy'_x - \frac{m}{m+n}y}. \quad (18)$$

Сделаем замену в показателях: $2k-1 \to k, 2l-1 \to l, 1-2m \to m, 1-2n \to n$.

Тогда получается следующий результат: четырёхпараметрический класс уравнений с дробно-полиномиальными правыми частями

$$y''_{xx} = \\ = \frac{Ax^k y^l \left(y'_x\right)^m \left(xy'_x - y\right)^n \left[\left(l+1\right)xy'_x + \left(k+1\right)y\right]}{\left(2-m-n\right)xy'_x + \left(m-1\right)y} \quad (19)$$

с помощью преобразования

$$\theta = x^{\frac{k+1}{2}} y^{\frac{l+1}{2}}, V = \left(y'_x\right)^{\frac{1-m}{2}} \left(xy'_x - y\right)^{\frac{1-n}{2}} \quad (20)$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\dot{V}_\theta = A\frac{\theta}{V}. \quad (21)$$

Разрешимые трёхпараметрические подклассы класса уравнений (19) степенного и полиномиального вида

Дробно-полиномиальный класс уравнений (19) превращается в полиномиальный в частных случаях, когда знаменатель в правой части (19) сокращается с одним из множителей числителя.

Это происходит в одном из четырёх случаев:

1) $\frac{k+1}{l+1} = \frac{m-1}{2-m-n}$;
2) $\frac{m-1}{2-m-n} = -1, n = 1$;
3) $m = 1$;
4) $2-m-n = 0$, т.е. $n = 2-m$.

В случае 1) получается приведенный в (15) трёхпараметрический класс уравнений.

В случае 2) имеем следующий результат: класс уравнений

$$y''_{xx} = \frac{A\left(l+1\right)}{1-m}x^k y^l \left(y'_x\right)^m \left(xy'_x + \frac{k+1}{l+1}y\right) \quad (22)$$

с помощью преобразования

$$\theta = x^{\frac{k+1}{2}} y^{\frac{l+1}{2}}, V = \left(y'_x\right)^{\frac{1-m}{2}}$$

приводится к уравнению (21)

В случае 3) класс уравнений (при замене $k \to k+1$)

$$y''_{xx} = \frac{A\left(l+1\right)}{1-n}x^k y^l \left(xy'_x - y\right)^n \left(xy'_x + \frac{k+2}{l+1}y\right) \quad (23)$$

с помощью преобразования

$$\theta = x^{\frac{k+2}{2}} y^{\frac{l+1}{2}}, V = \left(xy'_x - y\right)^{\frac{1-n}{2}}$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными (21).

В случае 4) класс уравнений (при замене $l \to l+1$)

$$y''_{xx} = \\ = \frac{A\left(l+2\right)}{m-1}x^k y^l \left(y'_x\right)^m \left(xy'_x - y\right)^{2-m} \left(xy'_x + \frac{k+1}{l+2}y\right) \quad (24)$$

с помощью преобразования

$$\theta = x^{\frac{k+1}{2}} y^{\frac{l+2}{2}}, V = \left(\frac{xy'_x - y}{y'_x}\right)^{\frac{m-1}{2}}$$

также приводится к уравнению (21).

Отметим, что трёхпараметрический подкласс в (15) класса уравнений (19) имеет степенной вид, а (22), (23) и (24) — полиномиальный.

«Размножение» полученных результатов

В статье [13] был проведён ДГА класса ОДУ 2-го порядка дробно-полиномиального вида:

$$y''_{xx} = \frac{\sum_{i=1}^{p} A_i x^{k_i} y^{l_i} \left(y'_x\right)^{m_i} \left(xy'_x - y\right)^{n_i}}{\sum_{i=p+1}^{2p} A_i x^{k_i} y^{l_i} \left(y'_x\right)^{m_i} \left(xy'_x - y\right)^{n_i}}. \qquad (25)$$

Для класса уравнений (25) была найдена дискретная группа (диэдра) преобразований, замкнутых в этом классе уравнений:

$$D_6 = \left\{\mathbf{E}, \mathbf{h}, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3, \mathbf{h}^4, \mathbf{h}^5, \mathbf{r}, \mathbf{hr}, \mathbf{h}^2\mathbf{r}, \mathbf{h}^3\mathbf{r}, \mathbf{h}^4\mathbf{r}, \mathbf{h}^5\mathbf{r}\right\},$$
$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{h}^6 = \left(\mathbf{hr}\right)^2 = \mathbf{E},$$

где

$$\mathbf{r}: x \rightleftarrows y, \mathbf{h}: x \to \frac{1}{y'_x}, y \to -\frac{xy'_x - y}{y'_x}. \qquad (26)$$

Поскольку класс уравнений (19) принадлежит общему классу дробно-полиномиальных уравнений (25), то к нему применима дискретная группа преобразований D_6 (26) 12-го порядка. Следовательно, с помощью преобразований группы D_6 из разрешимого класса уравнений (19) можно найти ещё 11 разрешимых четырёхпараметрических классов уравнений. Аналогичное можно сказать о трёхпараметрических классах уравнений (15), (22), (23) и (24).

Заключение

В данной статье впервые проинтегрирован четырёхпараметрический класс ОДУ 2-го порядка дробно-полиномиального вида, а также его трёхпараметрические подклассы степенного и полиномиального вида, один из которых был найден ранее [7].

«Размножение» полученных разрешимых классов уравнений (19), (15), (22), (23), (24) по найденной дискретной группе 12-го порядка — это ближайшая перспектива дальнейших исследований в данном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений // Деп. ВИНИТИ № 5739-82. — 1982. — 130 с.
2. Зайцев В.Ф., Кормилицына Т.В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч. 2 // Деп. ВИНИТИ № 3720-85. — 1985. — 152 с.
3. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин — М.: Наука, 1993. — 464 с.
4. Хакимова З.Н. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Актуальные вопросы современной науки, №3. — СПб., 2014. — С. 3–11.
5. Хакимова З.Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев / З. Н. Хакимова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения — 2017». — СПб.: РГПУ, 2017. — С. 112–117.
6. Polyanin A.D. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems / A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev. — CRC Press. Boca Raton — London, 2018. — 1496 p. DOI: 10.1201/9781315117638
7. Хакимова З.Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го порядка / З.Н. Хакимова // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, 2014 — С. 57–62.
8. Хакимова З.Н. Симметрии и интегрирование уравнений орбиты одного дискретно-инвариантного дифференциального уравнения второго порядка степенного вида / З.Н. Хакимова, М.А. Лисицына // Перспективы науки. — Тамбов: ТМБпринт. — 2024. — № 8 (179). — С. 51–55.
9. Хакимова З.Н. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью инвариантов дискретных преобразований [Электронный ресурс] / З.Н. Хакимова, А.А. Атоян // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2024. — N 3. — С. 123–133. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2024.3/article.1.8.html (дата обращения: 21.12.2025)
10. Хакимова З.Н. О дискретно-инвариантных классах обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Математика и математическое образование в современном обществе». — СПб.: РГПУ, 2025. — С. 35–38.
11. Хакимова З.Н. Интегрирование мультипликативных классов обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью дискретных инвариантов // Сборник трудов Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». — Воронеж, 2024. — С. 146–150.
12. Хакимова З.Н. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений: методы получения точных решений уравнений [Электронный ресурс] / З.Н. Хакимова, Е.А. Шахова // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2025. — N 3. — С. 154–162. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2025.3/article.1.9.html (дата обращения: 21.12.2025)
13. Хакимова З.Н. Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве [Электронный ресурс] / З.Н. Хакимова, О.В. Зайцев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2021. — N 1(4). — С. 61–92. — URL: https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2021.1/article.1.4 (дата обращения: 21.12.2025)