

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОДИНАМИЧЕСКОГО ВЛИЯНИЯ АНОМАЛЬНОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

MODELING OF GEODYNAMIC INFLUENCE OF AN ANOMALOUS BODY OF VARIABLE DENSITY IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF THE EARTH

V. Kosygin

Summary. The problem of determining the stress-strain state of a highly viscous geological medium caused by the presence of density inhomogeneities in the gravitational field of the Earth is considered. The Navier equation, known from the theory of elasticity, is used as a model approximation. The solution of this equation for an elastic half-space containing density inhomogeneities is considered. At the upper boundary of this half-space, coinciding with the day surface of the Earth, the condition of a flat free surface was considered. In this formulation, it was possible to use the solution of the Mindlin problem for a unit force, which, when the Poisson's ratio tends to 0.5, turns into a solution of the corresponding hydrodynamic problem for a highly viscous medium. An analytical solution of the problem is obtained for a typical approximating element — a rectangular parallelepiped. Calculations are made on a model example.

Keywords: stresses, tectonosphere, highly viscous medium, Poisson's ratio, Navier equation, Mindlin problem, gravity, parallelepiped, viscosity coefficient, velocity vector.

Косыгин Владимир Юрьевич

Д.г.-м.н., в.н.с., профессор, Дальневосточное отделение Российской академии наук, Хабаровск
kosyginv@inbox.ru

Аннотация. Рассмотрена задача определения напряженно-деформированного состояния сильновязкой геологической среды, обусловленного наличием в ней плотностных неоднородностей в гравитационном поле Земли. В качестве модельного приближения использовано известное из теории упругости уравнение Навье. Рассмотрено решение этого уравнения для упругого полупространства, содержащего плотностные неоднородности. На верхней границе этого полупространства, совпадающей с дневной поверхностью Земли, рассматривалось условие плоской свободной поверхности. В такой постановке удалось воспользоваться решением задачи Миндлина для единичной силы, которое при стремлении коэффициента Пуассона к значению 0,5 переходит в решение соответствующей гидродинамической задачи для сильновязкой среды. Получено аналитическое решение задачи для типового аппроксимирующего элемента — прямоугольного параллелепипеда. Произведены расчеты на модельном примере.

Ключевые слова: напряжения, тектоносфера, сильновязкая среда, коэффициент Пуассона, уравнение Навье, задача Миндлина, сила тяжести, параллелепипед, коэффициент вязкости, вектор скорости.

Введение

Анализ напряжений, деформаций и движений среды во внешней сферической оболочке Земли — тектоносфере (мощностью до 700 км), в которой сосредоточены все основные геологические процессы, является одной из основных задач геодинамики.

В данной статье реализован подход к анализу напряженно-деформированного состояния тектоносферы Земли основывающийся на представлении о том, что тектоносферу в первом приближении можно считать сильно вязкой несжимаемой средой. Так Е.В. Артюшковым [1], на основе анализа послеледниковых изостатических поднятий в Фенноскандии и других обширных геолого-геофизических материалов было показано, что в условиях чрезвычайно медленно протекающих во времени геологических процессов (от нескольких тысяч до десятков миллионов лет) и крупных размеров геологических тел (от десятков метров до тысяч киломе-

тров в поперечнике) тектоносферу Земли можно считать сильновязкой несжимаемой жидкой средой.

В предлагаемой методике оценки геомеханического состояния тектоносферы в качестве источников напряжений и движений в сильновязкой среде взяты её плотностные неоднородности. Плотностные неоднородности в поле силы тяжести Земли создают объемные силы, которые затем учитывались при решении уравнений механического равновесия. Задача определения напряжений, деформаций и скоростей вязкого движения среды ставилась для полупространства, содержащего плотностные неоднородности.

Методика исследований

Движение сильновязкой несжимаемой среды в поле силы тяжести Земли описывается уравнением Навье — Стокса в приближении малых чисел Рейнольдса и условием несжимаемости среды [2]

$$-\text{grad } p + \eta \nabla^2 \bar{V} + \rho \bar{g} = 0, \quad (1)$$

$$\text{div } \bar{V} = 0, \quad (2)$$

где p — давление, η — коэффициент динамической вязкости, \bar{V} — вектор скорости деформации, ρ — аномальная плотность, \bar{g} — ускорение силы тяжести нормальной Земли, ∇^2 — дифференциальный оператор «Лапласиан».

Решение системы уравнений (1) — (2) предполагается разыскивать в декартовом полупространстве, содержащем плотностную неоднородность объема V с аномальной плотностью ρ при условии постоянной вязкости среды. На верхней границе исследуемого объема тектоносферы, совпадающей с дневной поверхностью Земли S , рассматривается условие плоской свободной поверхности

$$[\sigma_{ij}] \bar{n} = \bar{0}, \quad (3)$$

где $[\sigma_{ij}]$ — тензор напряжений, \bar{n} — вектор нормали к дневной поверхности S .

Для решения задачи (1) — (3) рассмотрим известное из теории упругости решение уравнения Навье в перемещениях [3,4]:

$$-\frac{\mu}{2\nu-1} \text{grad } \text{div} \bar{u} + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{g} = 0, \quad (4)$$

где \bar{u} — вектор упругого перемещения, μ — модуль сдвига ($\mu = \text{const}$), ν — коэффициент Пуассона, ρ — аномальная плотность плотностной неоднородности объема V , \bar{g} — ускорение силы тяжести нормальной Земли.

Решение задачи рассматривалось для упругого полупространства, содержащего плотностную неоднородность объема V в гравитационном поле Земли. На верхней (дневной) поверхности S полупространства рассматривается условие плоской свободной поверхности

$$[\sigma_{ij}] \bar{n} = \bar{0}, \quad x \in S, \quad (5)$$

где \bar{N} — нормаль к дневной поверхности S , $[\sigma_{ij}]$ — тензор напряжений [3,4]:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \sigma_{kk} = 2\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - p; \quad (6)$$

$$p = \frac{2\mu(\nu+1)}{3(2\nu-1)} \text{div} \bar{u}; \quad i \neq j; \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

p — гидростатическая составляющая тензора напряжений — аналог давления в вязкой жидкости [2].

Решение задачи (4) — (5) имеет вид

$$u_i = \rho g \int_V u_i^v dx'_1 dx'_2 dx'_3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь

V — объем тела с аномальной плотностью ρ , u_i — i -ая компонента вектора упругого перемещения и,

$$u_1^v = \frac{(x_1 - x'_1)}{16\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{x_3 - x'_3}{R_1^3} - \frac{x_3 + x'_3}{R_2^3} \right) - \frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + (1-2\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \right), \quad (8)$$

$$u_2^v = \frac{(x_2 - x'_2)}{16\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{x_3 - x'_3}{R_1^3} - \frac{x_3 + x'_3}{R_2^3} \right) - \frac{1}{4\pi\mu} \left(x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + (1-2\nu) \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \right), \quad (9)$$

$$u_3^v = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left(\frac{(x_3 - x'_3)^2}{R_1^3} - \frac{(x_3 + x'_3)^2}{R_2^3} + (3-4\nu) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right) + \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \Phi - \frac{x_3}{4\pi\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \quad (10)$$

где

$$R_1^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2,$$

$$R_2^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 + x'_3)^2,$$

$$\Phi = \frac{1}{R_2} + \frac{x'_3}{2(1-\nu)} \frac{x_3 + x'_3}{R_2^3},$$

$$\Omega = \ln(R_2 + x_3 + x'_3) - \frac{x'_3}{2(1-\nu)} \frac{1}{R_2}.$$

Соотношения (8) — (10) представляют собой решение задачи Миндлина [4] для единичной силы, действующей

в точке x' с координатами x'_1, x'_2, x'_3 в положительном направлении оси Ox_3 , совпадающим с направлением вектора ускорения силы тяжести \bar{g} .

u^v — вектор упругого перемещения вызванный действием единичной силы, а u_i^v — компоненты этого вектора.

Интеграл (7) от компонент u_i^v вектора упругого перемещения u^v , обусловленного действием единичной силы, позволяет получить выражения для компонент вектора упругого перемещения u_i обусловленных влиянием тела объема V с аномальной плотностью ρ

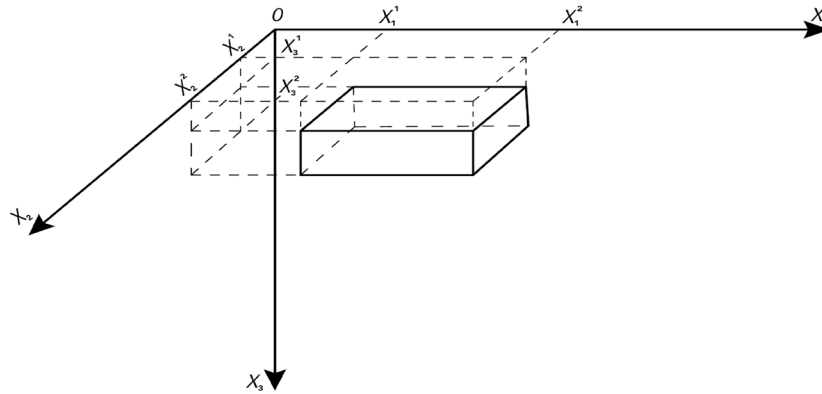


Рис. 1. Типовой аппроксимирующий элемент

Значения коэффициента Пуассона ν для изотропных материалов находятся в пределах от -1 до $0,5$. Максимального значения $0,5$ этот коэффициент достигает для несжимаемых материалов.

Пользуясь соотношением (6) для давления p переписем уравнение (4) в следующем виде:

$$-\frac{3}{2(\nu+1)} \text{grad } p + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{g} = 0. \quad (11)$$

При $\nu \rightarrow 0,5$ уравнение (12) примет вид

$$-\text{grad } p + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{g} = 0. \quad (12)$$

Так как значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ отвечает несжимаемой среде, то

$$\text{div } \bar{u} = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (12), (13) при формальной замене модуля сдвига μ на коэффициент динамической вязкости η , вектора упругого перемещения \bar{u} на вектор скорости деформации \bar{V} будет совпадать с системой уравнений (1), (2) динамики сильновязкой жидкости, а решение задачи (4) — (5) (формулы (7) — (10)) при $\nu \rightarrow 0,5$ и соответствующей замене вышеотмеченных параметров, будет решением соответствующей гидродинамической задачи (1) — (3) для сильновязкой несжимаемой среды.

Аналитическое решение задачи для прямоугольного параллелепипеда

При проведении численных расчётов любое аномальное по плотности геологическое тело удобно аппроксимировать с помощью системы элементарных тел (многогранников) имеющих постоянные или меняющиеся по некоторому заданному закону значения аномальной плотности ρ . Такой подход широко используется

в геофизике при решении задач моделирования [5–7] и позволяет получать эффективные по быстродействию и точности вычислительные алгоритмы. В качестве элементарных тел, используемых при аппроксимации, наиболее часто употребляемы и удобны при вычислениях следующие многогранники: прямоугольный параллелепипед, горизонтальная призма с сечением в виде трапеции, вертикальная призма с треугольным основанием и т.д.

В данной работе для определения поля скоростей деформации \bar{V} и компонент тензора σ_{ij} , обусловленных влиянием тела аномальной плотности ρ произвольной формы, применена аппроксимация такого тела элементарными телами в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 1).

С помощью таких тел различных размеров и аномальных плотностей можно аппроксимировать любое аномальное геологическое тело переменной плотности, геодинамический эффект от которого будет равен сумме эффектов от аппроксимирующих его элементарных тел (параллелепипедов).

В связи с этим получим формулы для расчета компонент скоростей деформации V_{ij} , тензора напряжений σ_{ij} и давления p , обусловленных влиянием тела в виде параллелепипеда с аномальной плотностью ρ .

На основании аналитических соотношений для прямых задач ньютоновского потенциала [7], а также формул (7) — (10), где коэффициент Пуассона ν принят равным $0,5$ модуль сдвига μ формально заменен на коэффициент вязкости η , а компоненты перемещений u_i заменены на компоненты скоростей деформации V_{ij} , запишем полное аналитическое выражение для компонент поля скоростей смещения V_{ij} , обусловленных влиянием прямоугольного параллелепипеда с аномальной плотностью ρ .

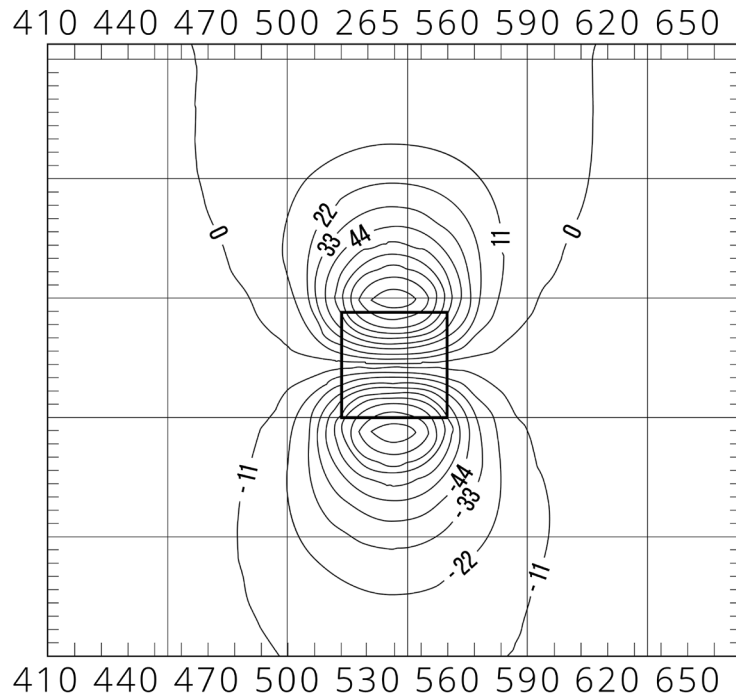


Рис. 2. Распределение вертикальной компоненты $\sigma_{x_3x_3}$ тензора напряжений (в барах)

$$V_k(\bar{x}) = \rho g \left(d_1 (S_{k2}^1 - S_{k1}^1 + S_{k2}^2 - S_{k1}^2) + \frac{d_2 x_3}{2} (F_{k2} - F_{k1}) + d_2 x_3 (q_{k2}^2 - q_{k1}^2) \right), \quad k = 1, 2;$$

$$V_3(\bar{x}) = \rho g \left(d_1 (q_{32}^1 - q_{31}^1 - q_{32}^2 + q_{31}^2 + 2(Q_1 - Q_2)) + \frac{1}{2} d_2 F - \frac{x_3}{2d_2} F_{x_3} \right).$$

Здесь

$$d_1 = \frac{1}{8\pi\eta}, \quad d_2 = \frac{1}{2\pi\eta};$$

$$F_{kj} = x_3^j \ln(R_2 + x_l - x_l') \Big|_{x_3^1=x_3^j}^{x_3^2=x_3^k} \Big|_{x_l^1=x_l^j}^{x_l^2=x_l^k}, \quad l \neq k, \quad l \neq 3;$$

(Формула для F_{kj} записана в компактной форме, которая раскрывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & x_3^j \ln(R_2 + x_l - x_l') \Big|_{x_3^1=x_3^j}^{x_3^2=x_3^k} \Big|_{x_l^1=x_l^j}^{x_l^2=x_l^k} = \\ & = \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+k} x_3^k \ln(R_2 + x_l - x_l^j) \end{aligned}$$

Такой же смысл имеют аналогичные компактные записи последующих формул.)

$$S_{ij}^k = (x_l - x_l') R_k + \frac{1}{2} \left((x_l - x_l')^2 + (x_m - x_m^j)^2 \right) \ln(R_k + x_l - x_l') \Big|_{x_l^1=x_l^j}^{x_l^2=x_l^k} \Big|_{x_m^1=x_m^j}^{x_m^2=x_m^k};$$

$$i, l, m = \overline{1, 3}; \quad l \neq i; \quad l \neq m; \quad i \neq m; \quad k, j = 1, 2;$$

$$Q_k = \frac{1}{2} \left((x_1^2 - x_1) q_{12}^k - (x_1^1 - x_1) q_{11}^k + (x_2^2 - x_2) q_{22}^k - (x_2^1 - x_2) q_{21}^k + (x_3^2 - x_3) q_{32}^k - (x_3^1 - x_3) q_{31}^k \right);$$

$$q_{ij}^k = (x_l - x_l') \ln(R_k + x_m - x_m') + (x_m - x_m') \ln(R_k + x_l - x_l') +$$

$$+ (x_i - x_i^j) \operatorname{arctg} \frac{(x_l - x_l')(x_m - x_m')}{(x_i - x_i^j) R_k} \Big|_{x_l^1=x_l^j}^{x_l^2=x_l^k} \Big|_{x_m^1=x_m^j}^{x_m^2=x_m^k};$$

$$l, i, m = 1, 2, 3; \quad k, j = 1, 2;$$

$$l \neq m; \quad l \neq i; \quad m \neq i;$$

$$F = Q_2 + (x_3^1 q_{31}^2 - x_3^2 q_{32}^2);$$

$$F_{x_3} = (x_3^2 (x_3^2 + x_3) A_{32} - x_3^1 (x_3^1 + x_3) A_{31}) + 2(q_{32}^2 - q_{31}^2);$$

$$A_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{(x_l - x_l')(x_m - x_m')}{(x_i - x_i^j)} \Big|_{x_l^1=x_l^j}^{x_l^2=x_l^k} \Big|_{x_m^1=x_m^j}^{x_m^2=x_m^k};$$

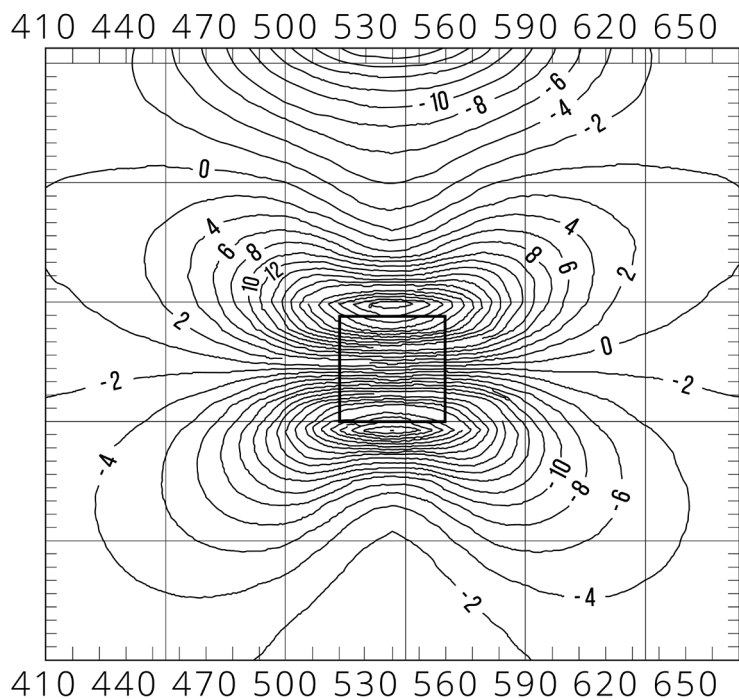


Рис. 3. Распределение горизонтальной компоненты $\sigma_{x_1x_1}$ тензора напряжений (в барах)

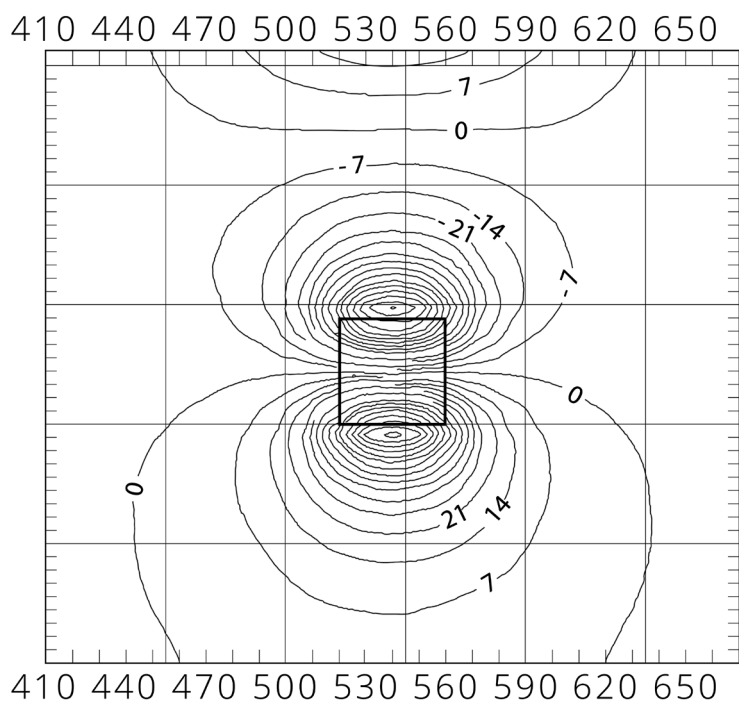


Рис. 4. Распределение давления p (в барах)

$$l, i, m = 1, 2, 3; \quad l \neq i; l \neq j; l \neq m; \quad j = 1, 2;$$

Далее из соотношений (6), при замене в них компонент u_i на V_i и модуля сдвига μ на коэффициент вязкости η определялись в аналитическом виде выражения для компонент тензора σ_{ij} и давления p при $\nu \rightarrow 0,5$. Однако, в силу их громоздкости, эти выражения здесь не приводятся.

Результаты расчетов на модельном примере

Куб размером $40 \times 40 \times 40$ км расположен на глубине 100 км. Верхняя грань куба имеет координаты $x_3 = 100$, нижняя грань — 140, боковые грани имеют координаты $x_1 = 520$, $x_1 = 560$ и $x_2 = -20$, $x_2 = 20$ км соответственно. Расчеты производились в плоскости $x_2 = 0$ при $\nu = 0,5$, $\rho = 10 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 10^{22} \text{ Па}\cdot\text{с}$. Результаты расчетов приведены на рисунках 2–4, где оцифровка осей координат дана в километрах, а изолиний — в барах.

Заключение

Рассмотрена постановка прямой задачи геомеханики. В качестве модельного приближения геологической

среды рассмотрено сильновязкое однородное полупространство, содержащее плотностные неоднородности в гравитационном поле Земли.

Рассмотрено решение задачи Миндлина для упругого полупространства, которое при коэффициенте Пуассона $\nu \rightarrow 0,5$ и соответствующей формальной замене модуля сдвига μ на коэффициент динамической вязкости η и вектора упругого перемещения \vec{u} на вектор скорости деформации \vec{V} становится решением соответствующей гидродинамической задачи динамики движения сильновязкой несжимаемой среды.

Получено полное аналитическое решение для типового аппроксимирующего тела — прямоугольного параллелепипеда. Проведены расчеты для модельного примера и определены характеристики геомеханического состояния среды, содержащий куб аномальной плотности. Используя полное аналитическое решение задачи динамики сильновязкой среды для аномально-го параллелепипеда, можно рассчитать геомеханический эффект от любого геологического тела переменной плотности через суммарный эффект от аппроксимирующих его параллелепипедов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артюшков Е.В. Геодинамика. М.: Наука, 1979. 327 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1957. 784 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Бульчев А.А., Лыгин И.В., Кузнецов К.М. Поле притяжения многогранника и многоугольной пластины с линейной плотностью // Физика Земли, 2018. № 4. С. 58–67.
6. Пятаков Ю.В., Исаев В.И., Косыгин В.Ю. Методы теории потенциала при решении прямых задач гравиметрии и геодинамики трехмерных неоднородных сред // Известия Томского политехнического университета, 2012. Т. 321, № 1. С. 76–83.
7. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 228 с.

© Косыгин Владимир Юрьевич (kosyginv@inbox.ru).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»