DOI 10.37882/2223-2966.2023.7-2.38

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА ИНВЕСТИРОВАНИЯ

SOLVING THE PROBLEM OF CHOOSING THE OPTIMAL OPTION INVESTING

H. Shungarov
R. Botashev

Summary: In this paper, an algorithm is given for solving the problem of choosing the optimal investment option, which reduces to the problem of linear integer Boolean programming. The algorithm allows you to get the maximum possible profit. The article also examines the effectiveness of the developed algorithm on a specific example.

Keywords: investment, probability, integer programming, Boolean variable, average payout, total variance, optimal variant, linear form, profit maximization, pseudopolynomial algorithm.

Шунгаров Хамид Джашауевич
к.ф.-м.н., доц., Карачаево-Черкессий государственный университет имени У.Д. Алиева, г. Карачаевск, Россия
hamidsh@rambler.ru
Боташев Руслан Азаматович
доц., Карачаево-Черкессий государственный университет имени У.Д. Алиева, г. Карачаевск, Россия
botashevruslan@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе дается алгоритм решения задачи выбора оптимального варианта внесения инвестиции, которая сводится к задаче линейного целочисленного булева программирования. Алгоритм позволяет получать максимально возможную прибыль. В статье также проводится исследование эффективности действия разработанного алгоритма на конкретном примере.

Ключевые слова: инвестиции, вероятность, целоцисленное программирование, булева переменная, средняя выплата, суммарная дисперсия, оптимальный вариант, линейная форма, максимизация прибыли, псевдополиномиальный алгоритм.

Ранее в работах [1, 2] исследовалась модель задачи выбора оптимального проекта инвестиций. В настоящей работе предлагается «жадный» алгоритм α решения одной задачи выбора оптимального варианта инвестирования.

Рассмотрим следующую задачу: требуется некоторую сумму денег (C) так распределить между n вариантами инвестиций в каждом из m периодов времени, чтобы сумма получаемых выплат от всех инвестиций по всем периодам была максимальной. С математической точки зрения эта задача является сложной комбинаторной. Известно, что задача инвестиций в общей постановке является нелинейной, однако при некоторых условиях она сводится к задаче линейного булева программирования. Введем обозначения: p_j — средняя выплата, получаемая в период j, от инвестиций i, q_j — размер инвестиций i, которая осуществлена в период времени j, размером инвестиции в каждом периоде времени $\gamma_{ij} = p_j - q_j$, дисперсия этой величины σ^2_{ij}, предполагается известной. А также особенностью данной дискретной модели является то, что для формулировки задачи в рассмотрение вводится булева переменная, т.е.

$$x_i = \begin{cases} 1 - \text{если инвестиция } i \text{ выбрана} \\ 0 - \text{если инвестиция } i \text{ не выбрана} \end{cases}, i = 1,2,\ldots,n \text{ [4]}.$$

В общем случае необходимо максимизировать сумму получаемых выплат от всех инвестиций по всем периодам, т.е. максимизировать следующую линейную форму

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} (p_{ij} - q_{ij}) \to \max \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (p_{ij} - q_{ij}) - \Psi(\alpha)(1/\sqrt{n})\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \xi_{ij}} + C_j > 0. \quad (2)$$

$$x_i = 0 \vee 1,\ j = 1,\ldots,m$$

Обозначив через C_j сумму, имеющуюся в период j. Из системы неравенств (2) нетрудно получить систему:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (p_{ij} - q_{ij}) + C_j > \Psi(\alpha)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_{ij}}. \qquad (3)$$

Целевая функция (1) и условия (2) (задача (1)–(2)) образуют математическую модель рассматриваемой задачи. Задача (1), (3) является задачей нелинейного целочисленного программирования. Она превращается в линейную, если вместо дисперсии в (3) рассматривать среднеквадратичное отклонение. [10, с.4].

Введем следующие обозначения:

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{m} (p_{ij} - q_{ij}),\ i = 1,\ldots,n, \qquad (4)$$

Тогда получим рассматриваемую задачу инвестиций:

$$\text{максимизировать:} \qquad f_0(x) = \sum_{j=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \to \max, \qquad (5)$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \gamma_{ij} \le c_j,\ j = 1,2,\ldots,m, \tag{6}$$

$$x_i \{0,1\},\ x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right). \tag{7}$$

Задача (5)–(7) является задачей линейного булева программирования, для решения которой можно использовать псевдополиномиальный алгоритм метода построения последовательности планов [5].

Пример выбора оптимального варианта внесения инвестиций

Допустим, что на предприятии «ФОТОН» имеется свободные деньги в сумме 16500 тыс. руб., которые можно вложить в альтернативные проекты: №1 — депозиты в Россельхозбанке; №2 — акции фирмы «Камос»; №3 — реконструкция своего производства в течение пяти лет с 2023 по 2027 гг. При этом, ставка процента ежегодно меняется: в № 1 — от 16 до 20 %; в № 2 — от 21 до 25 %; в № 3 — от 26 до 30 %. Вероятность инвестирования также меняется: в № 1— от 0,60 до 0,40 %; в № 2— от 0,70 до 0, 50 %; в № 3— от 75 до 95 %.

Необходимо выбрать инвестиционный проект, который принесёт максимум дохода.

Данные и результаты вычислений занесём в таблицу 1.

Из таблицы 1 и из условий (4) находим коэффициенты целевой функции: $\beta_1 = 1320$; $\beta_2 = 3226$; $\beta_3 = 1225$. Тогда целевая функция примет вид:

$$f_0(x) = 1320x_1 + 3226x_2 + 1225x_3.$$

Сначала сформулируем общий вид системы ограничений:

$$\begin{cases} x_1\gamma_{11} + x_2\gamma_{21} + x_3\gamma_{31} - c_1 > \left(\xi_{11} + \xi_{21} + \xi_{31}\right) \\ x_1\gamma_{12} + x_2\gamma_{22} + x_3\gamma_{32} - c_2 > \left(\xi_{12} + \xi_{22} + \xi_{32}\right) \\ x_1\gamma_{13} + x_2\gamma_{21} + x_3\gamma_{31} - c_3 > \left(\xi_{13} + \xi_{23} + \xi_{33}\right) \\ x_1\gamma_{14} + x_2\gamma_{24} + x_3\gamma_{34} - c_4 > \left(\xi_{14} + \xi_{24} + \xi_{34}\right) \\ x_1\gamma_{15} + x_2\gamma_{25} + x_3\gamma_{35} - c_5 > \left(\xi_{15} + \xi_{25} + \xi_{35}\right) \end{cases}$$

Затем вычислим коэффициенты системы ограничений:

$\gamma_{11} = 148$; $\gamma_{12} = 200$; $\gamma_{13} = 258$; $\gamma_{14} = 322$; $\gamma_{15} = 392$;

$\gamma_{21} = 490$; $\gamma_{22} = 555$; $\gamma_{23} = 640$; $\gamma_{24} = 731$; $\gamma_{25} = 810$;

$\gamma_{31} = 179$; $\gamma_{32} = 270$; $\gamma_{33} = 253$; $\gamma_{34} = 228$; $\gamma_{35} = 195$.

Таблица 1.

i (инв.)	j (год)	Инвест (q_{ij})	Ставка (k)	Вер–ть (p)	Средн. выпл. ($p_{ij} = p{*}q_{ij}$)	Разница ($p_{ij} - q_{ij}$)	ξ_{ij}
Депозиты в банке	2023	400	16	0,63	252	–148	223
	2024	500	17	0,60	300	–200	256
	2025	600	18	0,57	342	–258	281
	2026	700	19	0,54	378	–322	295
	2027	800	20	0,51	408	–392	296
Итого		3000			1680	–1320	
Акции	2023	1400	21	0,65	910	–490	820
	2024	1500	22	0,63	945	–555	836
	2025	1600	23	0,60	960	–640	822
	2026	1700	24	0,57	969	–731	795
	2027	1800	25	0,55	990	–810	786
Итого		8000			4774	–3226	
Производство	2023	900	26	0,69	621	–279	576
	2024	1000	27	0,73	730	–270	693
	2025	1100	28	0,77	847	–253	817
	2026	1200	29	0,81	972	–228	950
	2027	1300	30	0,85	1105	–195	1090
Итого		5500			4275	–1225	
Всего		16500			10729	–5771	

Тогда после подстановок получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 148x_1 + 490x_2 + 279x_3 > 432 - 2700 \\ 200x_1 + 555x_2 + 270x_3 > 662 - 3000 \\ 258x_1 + 640x_2 + 253x_3 > 662 - 3300. \\ 322x_1 + 731x_2 + 228x_3 > 510 - 3600 \\ 392x_1 + 810x_2 + 195x_3 > 666 - 3900 \end{cases}$$

Получим следующую задачу:

Требуется найти максимальное значение целевой функции $f_0(x) = 1320x_1 + 3226x_2 + 1225x_3$ при условиях:

$$\begin{cases} 148x_1 + 490x_2 + 279x_3 \le 1081 \\ 200x_1 + 555x_2 + 870x_3 \le 1215 \\ 258x_1 + 640x_2 + 253x_3 \le 1380, \\ 322x_1 + 731x_2 + 228x_3 \le 1560 \\ 485x_1 + 392x_2 + 810x_3 \le 1728 \end{cases}$$

$$x_i = 1 \vee 0, i = 1,2,3.$$

Полученную задачу можно решить посредством алгоритма метода построения последовательности планов [5]. В данной работе решение сформулированной задачи выбора оптимального варианта инвестирования производится по выше приведенному алгоритму α, используя данные таблицы 2 , в два этапа: α_1и α_2.

На этапе α_1 алгоритм α выбирает лучший инвестиционный проект по годам. На этапе α_2 алгоритм α из оставшихся двух проектов № 1 и № 3 алгоритм выбирает наиболее выгодный. В результате работы этапа α_1наилучшим на 2023 год им оказался проект № 2 (акции), в который вложено 1400 тыс. руб. На 2024 год алгоритм выбирает более выгодный проект № 2, в который вложено 1500 тыс. руб. На 2025 год алгоритм также выбирает проект № 2 —1400 тыс. руб., на 2026 год также выбирается проект № 2 —1700 тыс. руб., на 2027 год — проект № 2 —1800 тыс. руб. Если в течение 5 лет в проект № 2 будет вложено 8000 тыс. руб., то можно ожидать получение прибыли в сумме 3226 тыс. руб.

На этапе α_2 из оставшихся двух проектов №1 и №3 алгоритм α выбирает наиболее выгодный проект. В результате работы этапа α_2 следует, что если в проект №1 (депозиты) в течение 5 лет будет вложено 3000 тыс. ру-

Таблица 2.

Инвест проект (i)	Год (j)	Инвестиции (q_{ij})	Ставка (K)	Вер-ть (P)	Сред. выплат $M(X) = p_{ij} = K{*}p{*}q_{ij}$	Разница $\Delta_{ij} = \lvert p_{ij} - q_{ij} \rvert$	X_{ij}
№1 (депозиты)	2023	400	16 %	0,63	252	148	0
№2 (акции)	2023	1400	21 %	0,65	910	490	1
№3 (производ)	2023	900	26 %	0,69	621	279	0
Итого C_1		**2700**			**1783**	**917**	
№1 (депозиты)	2024	500	17 %	0,60	300	200	0
№2 (акции)	2024	1500	22 %	0,63	945	555	1
№3 (производ)	2024	1000	27 %	0,73	730	270	0
Итого C_2		**3000**			**1975**	**1025**	
№1 (депозиты)	2025	600	18 %	0,57	342	258	0
№2 (акции)	2025	1600	23 %	0,60	960	640	1
№3 (производ)	2025	1100	28 %	0,77	847	253	0
Итого C_3		**3300**			**2149**	**1151**	
№1 (депозиты)	2026	700	19 %	0,54	378	322	0
№2 (акции)	2026	1700	24 %	0,57	960	731	1
№3 (производ)	2026	1200	29 %	0,81	972	228	0
Итого C_4		**3600**			**2310**	**1281**	
№1 (депозиты)	2027	800	20 %	0,51	408	392	0
№2 (акции)	2027	1800	25 %	0,51	990	810	1
№3 (производ)	2027	1300	30 %	0,85	1105	195	0
Итого C_5		**3900**			**2503**	**1397**	
Всего С		**16500**			**10729**	**5771**	

блей, то возможно получение прибыли 1320 тыс. руб. Кроме того, если в проект №3 (производство) будет вложено 5500 тыс. рублей, то может быть получена прибыль в сумме 1225 тыс. рублей. Соотношение прибыли к внесенным затратам 0,44 и 0,22 показывает, что наиболее предпочтительным для внесения инвестиций является проект № 1 (депозиты). Согласно условий данной задачи алгоритм α позволяет найти следующее решение: $x = (1,1,1)$.

Также следует заметить, что в результате работы алгоритм α, за весь период инвестирования производит сначала выбор максимального значения целевой функции Fmax для всех вариантов инвестирования. При этом сначала алгоритм α выбирает вариант № 2, прибыль от вложения которого максимально может составить F_{max} (y_2=8000)=3226 тыс. руб. Затем для оптимального распределения инвестиций по вариантам №1 и №3 алгоритм α производит выбор по двум критериям: по максимальному значению целевой функции F_{max} и по наибольшему значению вклада. Таким образом, алгоритм α выбирает вариант №1 по первому критерию, для которого F_{max} (y_1=3000)=1320 тыс. руб., и вариант №3 — по наибольшему значению вклада Z_{max} (y_3(5500)) = 1225 тыс. руб.

Остаточные денежные средства в сумме 5500 тыс. руб. рекомендуется направить на расширение производства и обновление устаревшего оборудования предприятия. Таким образом, максимальная прибыль за весь период инвестирования может составить Z_{max} (16500 тыс.) = 5771 тыс. руб.

В заключение отметим, что расчет уровня экономической эффективности подтверждает, что предложенный алгоритм выбора варианта инвестирования является достаточно эффективным, поскольку уровень рентабельности проекта составляет 35 % (5771: 16500x100) при действующей норме 20 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боташев Р.А., Шунгаров Х.Д. Проблема выбора оптимального инвестиционного проекта. Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: естественные и технические науки. Москва, изд-во «Научные технологии», № 2-2, 2023 г. с. 67–73.
2. Шунгаров Х.Д., Боташев Р.А. Модель выбора оптимального варианта внесений инвестиций. — В сб. Регион. конф. Актуальные проблемы физики и астрономии. Карачаевск. с.72–77.
3. Грузинов В.П. Экономика предприятия. Юнити. Москва, 2002 г.
4. Крейкина М.Н. Финансовый менеджмент «Дело и Сервис», Москва, 2001 г.
5. Гольштейн Е.Г. Юдин Д.Ю. Новые направления в линейном программировании. Москва, изд-во «Советское радио», 1966 г.
6. Хедли Дж. Линейная алгебра (для экономистов). М, изд-во «Высшая школа», 1966 г.
7. Емеличев В.А., Комлик В.И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1981, 208 с.
8. Лихтенштейн В.Е. Модели дискретного программирования. М, изд-во «Наука», 1971 г.
9. Бирман И. Оптимальное программирование. Москва, изд-во «Экономика», 1968 г.
10. Демидович Б.П. и Марон И.А. Основы вычислительной математики. Москва, изд-во ФМЛ, 1963 г.
11. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. Москва, изд-во «Наука», 1968 г.

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»