

ДИНАМИКА ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В КОГНИТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Жовноватый Кирилл Евгеньевич

Аспирант, Российский Государственный
Университет им. А.Н. Косыгина
kirill.zhov@mail.ru

DYNAMICS OF PROCESSING OF STOCHASTIC INFORMATION INFLUENCES IN COGNITIVE SYSTEMS

K. Zhovnovatiy

Summary. This study aims to develop an analytical model describing the dynamics of processing stochastic information inputs in cognitive systems, accounting for significant variations in the processing speed for different information types. Input events are formalized using random process theory as a marked Poisson point process, where each event is defined by three key parameters: a random occurrence time, a random volume of transmitted information, and a random coefficient determining the system-specific speed of its processing. The state of the cognitive system at any given time is modeled as the accumulated sum of decaying response functions for each incoming event. These functions depend on the time elapsed since the information arrival, its initial volume, and the assigned processing speed coefficient.

The core result of the work is the rigorous derivation of analytical expressions for the mathematical expectations of two critical quantities: the total volume of information successfully processed by the system by a given time, and the volume of information remaining unprocessed (current «load»). A fundamental applicability constraint of the model is established: it is most adequate and informative when the characteristic time for the system to process a unit of information is comparable to the average time interval between consecutive event arrivals.

The obtained results provide a foundation for solving practical problems, such as optimizing the sequence of control actions on cognitive systems (biological or artificial), predicting and managing their workload, and for clearly specifying technical requirements for designed intelligent and cognitive systems, including requirements for throughput capacity and resilience to information flows.

Keywords: cognitive system, random point process, response function, processing speed coefficient.

Аннотация. Целью данного исследования является разработка аналитической модели, описывающей динамику обработки случайных информационных воздействий в когнитивных системах с учетом существенных вариаций скорости их переработки для разных типов информации. Входные воздействия формализованы в рамках теории случайных процессов как меченный точечный процесс Пуассона, где каждое событие характеризуется тремя ключевыми параметрами: случайным временем возникновения, случайным объемом передаваемой информации и случайным коэффициентом, определяющим индивидуальную скорость ее обработки системой. Состояние когнитивной системы в произвольный момент времени моделируется как накопленная сумма убывающих функций отклика на каждое поступившее событие. Эти функции зависят от времени, прошедшего с момента поступления информации, ее исходного объема и присвоенного коэффициента скорости обработки.

Основным результатом работы являются строго выведенные аналитические выражения для математических ожиданий двух критически важных величин: общего объема информации, успешно переработанного системой к заданному моменту времени, и объема информации, остающегося непереработанным. Установлено фундаментальное ограничение применимости модели: она наиболее адекватна и информативна в ситуации, когда характерное время обработки единицы информации системой соизмеримо со средним интервалом времени между поступлениями последовательных событий.

Полученные результаты создают основу для решения практических задач, таких как оптимизация последовательности управляющих воздействий на когнитивные системы, прогнозирование и управление их нагрузкой, а также для четкой формализации технических требований к проектируемым интеллектуальным и когнитивным системам, включая требования к пропускной способности и устойчивости к информационным потокам.

Ключевые слова: когнитивная система, точечный случайный процесс, функция отклика, коэффициент скорости обработки.

Введение

Любое локализованное во времени случайное явление может трактоваться как точечный случайный процесс, в котором точки на временной оси указывают случайные времена появления событий. Наиболее изученным классом точечных процессов являются пуассоновские процессы и многочисленные процессы, порождаемые пуассоновским.

Пуассоновские процессы описывают широкий круг явлений, возникающих в физике, технике и в функцио-

нировании когнитивных систем. К таким процессам относятся, в частности, передача нервных импульсов [1], явления в гидрологии и гидроклиматологии [2]. Пуассоновские процессы используются в разработке моделей распределения пикселей в электронной микроскопии и улучшении качества изображения [3, с. 1; 4, с. 74; 5; 6, с. 29101], визуализации медицинской томографии [7, с. 80; 8, с. 4], анализе сетевого трафика [9, с. 107658]. Наиболее полное изложение теории точечных пуассоновских процессов содержится в [10, с. 480].

Целью работы является аналитическое описание динамики процессов обработки информации, протекающих в когнитивных системах.

В работе предпринято аналитическое описание последовательного случайного процесса возникновения воздействий и их последующей обработки некоторой когнитивной системой. Математическим описанием возникающих воздействий являются случайные числа, типичной трактовкой которых является количество информации, соответствующее возникновению некоторого образа.

В работе приняты следующие основные допущения.

Состояние системы описывается неотрицательной функцией четырех аргументов — текущего времени, случайного времени появления воздействия на систему, численного описания воздействия и коэффициента скорости обработки воздействия. Состояние системы, развивающееся во времени, отождествляется с ее реакцией на появление воздействия.

Считается, что система подвергается воздействиям, которые могут возникать в случайные локализованные моменты времени и интерпретируются как последовательность воздействий на временной оси, число и расположение которых является случайным. Воздействиям ставятся в соответствие точки на временной оси, и таким образом формируется случайный точечный процесс, а воздействие образов на систему моделируются случайным количеством информации, которое называется метками.

Для простоты считается, что моделью таких меток является меченый случайный точечный процесс, основными характеристиками которого являются интенсивность появления событий, имеющая смысл среднего числа событий, появившихся в течение выбранной единицы времени, а также вероятностное распределение меток для каждой точки.

Отклик системы на последовательность меченых точек является суммой откликов системы на отдельные точки, т.е. предполагается, что система является линейной. Процесс на выходе системы называется фильтрованным меченым точечным процессом.

1. Математическая модель случайного процесса на входе системы

Рассмотрим процесс функционирования системы, развивающийся в непрерывном времени, и предположим, что вход системы дискретно (скачкообразно) меняет свое состояние. Таким образом, на входе системы действует случайный процесс появления точек, каждая из которых характеризуется величиной скачков.

Пусть наблюдение начинается в момент времени t_0 , а через некоторое время t_1 в текущий момент времени W_1 на входе системы появилась некоторая информация, через некоторое другое время t_2 в текущий момент времени W_2 появилась другая информация и т.д.

Введем в рассмотрение процесс $N(t)$ счета точек, в которых возникала информация и назовем его процессом счета точек или счетным точечным процессом. Таким образом, процесс $N(t)$ является кусочно-постоянным, имеет единичные приращения в моменты появления точек W_i и показывает, сколько точек появилось на интервале времени $[t_0, t)$.

Процесс появления точек на входе системы управляется внешними по отношению к системе факторами (внешней средой) и в ряде приложений должен рассматриваться как случайный. В связи с этим сделаем ключевое предположение о том, что времена появления точек W_i , а поэтому интервалы времени между появлениями точек t_i и число точек $N(t)$ тоже являются случайными величинами.

Реакция системы на известные, детерминированные входные воздействия изучается в большом числе работ, посвященных организационным системам. Между тем, естественно предположить, что большой интерес для изучения представляет реакция системы на случайные, непредсказуемые заранее воздействия. Это объясняется тем обстоятельством, что как в соответствии с гносеологическими представлениями [4, с. 81; 5, с. 113996], так и в соответствии с математической теорией передачи информации [6, с. 29088] новое знание (информация) генерируется (возникает, предъясвляется) тогда, когда имеется возможность случайного выбора из множества.

Для создания стохастической модели случайных воздействий необходимо задать базовые статистические характеристики времен появления этих воздействий, их числа и их величин.

Рассмотрим произвольный интервал времени $[s, t)$, такой, что $t - s = T$ и предположим, что число точек, появившихся к моментам времени t и s равно соответственно $N(t)$ и $N(s)$. Обозначим через $N(t, s) = N(t) - N(s)$ число точек, появившихся на этом интервале, а через $P(N(t, s) = n)$ вероятность того, что это число точек окажется равным n .

Применим широко применяющееся в различных областях знаний предположение о том, что за малый промежуток времени $T = t$ вероятность того, что точка появится пропорциональна некоторой константе

с точностью до бесконечно малой по отношению к t и что вероятность появления за это время двух и более точек стремится к нулю:

$$\begin{aligned} P(N(t, s) = 1) = \\ = \lambda \Delta t + O(\Delta t), P(N(t, s) > 1) = O(\Delta t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Если дополнительно потребовать, чтобы точки появлялись независимо друг от друга, то распределение произвольного числа точек на интервале T является пуассоновским:

$$P(N(t, s) = n) = \frac{1}{n!} (\lambda T)^n e^{-\lambda T}. \quad (1.2)$$

Таким образом, будем теперь полагать, что точечный процесс является пуассоновским случайным точечным процессом или просто пуассоновским точечным процессом, в котором времена появления точек $W_1, W_2, \dots, W_i$ и их число $N(t)$ к моменту времени t являются случайными величинами. Если теперь в (1.1) λ является функцией времени, то процесс становится неоднородным пуассоновским процессом с распределением

$$P(N(t, s) = n) = \frac{1}{n!} \left(\int_t^s \lambda(\tau) d\tau \right)^n \exp \left(- \int_t^s \lambda(\tau) d\tau \right), \quad (1.3)$$

Непосредственными вычислениями можно определить, что математическое ожидание числа точек, появившихся на интервале $[s, t]$ равно,

$$M(N(t, s)) = \int_t^s \lambda(\tau) d\tau. \quad (1.4)$$

Условие (1.1) часто называют предположением редких событий, имея в виду, что появление больше одной точки на интервале t стремится к нулю. Однако необходимо сделать следующие пояснения. Из соотношения (1.4) следует, что при $\lambda = \text{const}$ математическое ожидание числа точек, появившихся на интервале времени T равно λT , поэтому параметр λ характеризует интенсивность появления точек пуассоновского процесса, т.е. указывает среднее число точек, появляющихся в единицу времени, и имеет размерность 1 / время. При увеличении λ точки будут в среднем появляться чаще и наоборот.

Рассмотрим теперь случайный точечный процесс $\{N(t), t \geq t_0\}$ появления точек в процессе функционирования системы. Ассоциируем с каждой появившейся i -той точкой вектор V , состоящий из двух независимых случайных величин u_i и θ_i , и назовем этот вектор меткой, а соответствующий процесс — меченым пуассоновским процессом. Эти величины по определению являются внешними по отношению к точечному процессу, что значит, что они не могут влиять на интенсивность появления точек.

Каждая метка процесса V определяет случайное количество информации u_i , предъявленное системе для переработки, а также случайный коэффициент скорости обработки этой информации θ_i . Количество информации при этом может быть определено как энтропия источника случайных меток. Таким образом, значения u_i являются неотрицательными случайными величинами, имеющие положительное математическое ожидание, а значения θ_i являются строго положительными случайными величинами, имеющими положительное математическое ожидание.

Второй компонент меток V процесса обоснован тем, что когнитивные системы могут иметь свойство адаптации к обработке некоторой информации. Представим систему, на вход которой могут поступать различные типы информации, например, визуальная (изображения, видео) и текстовая. В зависимости от способа построения системы, визуальная информация может обрабатываться как быстрее, так и медленнее текстовой, при учете одинакового ее количества.

Представляет интерес изучение процесса накопления меток [7, с. 87] $\{u(t), t \geq t_0\}$ на интервале времени $[t, s]$:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} u_i, \quad (1.5)$$

В формуле (1.5) $u(t)$ является суммой случайного числа случайных слагаемых. Математическое ожидание $M_{u(t)}$ вычисляется с использованием свойств условных математических ожиданий:

$$M_{u(t)} = M_N \{ M_u [u(t) / N(t)] \} = M_N \left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} n_i \right\}.$$

Здесь применены очевидные обозначения для математических ожиданий с индексом, указывающим случайную величину, по которой происходит усреднение. Если все математические ожидания случайных меток равны n , то в соответствии с (1.4)

$$M_{u(t)} = n M_N N(t) = n \int_t^s \lambda(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

2. Динамические характеристики процесса переработки информации

Очевидно, что переработка информации должна занимать некоторое время, причем чем больше времени прошло с момента появления информации, тем меньшее ее количество остается неиспользованным. Пусть процесс переработки системой конкретного случайного количества информации описывается во времени функ-

цией $h(t, W_i, u_i, \theta_i)$. Тогда общее количество не переработанной к моменту времени t информации $y(t)$ равно

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} h(t, W_i, u_i, \theta_i). \quad (2.1)$$

Переработанное количество информации равно, очевидно, разности полученной и не переработанной информации:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^{N(t)} u_i - \sum_{i=1}^{N(t)} h(t, W_i, u_i, \theta_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{N(t)} (u_i - h(t, W_i, u_i, \theta_i)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Процесс (2.1) называется фильтрованным пуассоновским процессом. Он является случайным, поскольку порожден случайным неоднородным пуассоновским процессом и зависит от случайных меток.

Функция h в (2.1) называется откликом системы на каждое событие появления меченой точки точечного процесса или переходной функцией состояния системы. Таким образом, в этом смысле функции (2.1) и (2.2) могут трактоваться как функции состояния когнитивной системы при возникновении в ней образа.

Функция должна удовлетворять свойству физической реализуемости, т.е. $h(t, W_i, u_i, \theta_i) = 0$ для t_0 и быть убывающей. Теоретически на форму функции отклика не накладывается никаких других ограничений. Физическая размерность функции отклика также может быть любой, однако поскольку по постановке задачи процесс $y(t)$ является количеством информации, то и функцию h удобно доопределять так, чтобы ее размерность совпала с размерностью $y(t)$. Очевидно, это всегда можно сделать, вводя в определение функции отклика размерные константы. Ниже на конкретном примере эти вопросы поясняются более подробно.

В дальнейшем изучении процессов в когнитивных системах основную роль играет такая неслучайная характеристика фильтрованного процесса, как его математическое ожидание. Математическое ожидание фильтрованного процесса на интервале времени $[0, t]$ можно легко получить, используя метод, примененный при выводе формулы (1.6). В результате получим

$$\begin{aligned} M_u y(t) &= \int_0^t \lambda(s) M h(t, s, u_i, \theta_i) ds, \\ M_u \{\hat{y}(t)\} &= M_N \{n_i\} - \int_0^t \lambda(s) M \{h(t, s, u_i, \theta_i)\} ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Экспоненциальная функция отклика

Рассмотрим временной интервал $[W_i, t]$, включающий время W_i появления произвольной точки точечного

процесса с меткой u_i и текущее время t . Очевидно, что тогда функция h должна удовлетворять условию

$$h(W_i, W_i, u_i, \theta_i) = u_i. \quad (3.1)$$

Будем далее считать, что метки u_i имеют смысл количества информации, полученной системой в случайный момент времени W_i и измеряются, например, в двоичных единицах.

Пусть, далее, текущее время t получает малое приращение Δt . При этом функция отклика изменяется и становится равной $h(t + \Delta t, W_i, u_i, \theta_i)$. Поскольку физическим смыслом функции отклика является переработка информации, то потребуем, чтобы ее новое значение в момент времени $t + \Delta t$ уменьшилось на малую величину пропорционально некоторому коэффициенту k и величине приращения времени Δt , т.е.

$$h(t + \Delta t, W_i, u_i, \theta_i) = h(t, W_i, u_i, \theta_i) - kh(t, W_i, u_i, \theta_i) \Delta t.$$

Знак минус отвечает требованию уменьшения функции на интервале Δt . Легко заметить, что размерность коэффициента k равна $1 / \text{время}$. Переносим $h(t, W_i, u_i, \theta_i)$ в левую часть, деля обе части уравнения на и устремляя в процессе предельного перехода к нулю, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dh(t, W_i, u_i, \theta_i)}{dt} = -kh(t, W_i, u_i, \theta_i). \quad (3.2)$$

Таким образом, имеем дифференциальное уравнение для функции h (3.2) с начальными условиями (3.1). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$h(t, W_i, u_i, \theta_i) = u_i e^{-k\theta_i(t-W_i)}, t \geq W_i.$$

В результате, при сделанных предположениях отклик системы на полученную в момент времени W_i информацию u_i уменьшается по экспоненте с коэффициентом k , причем функция зависит от разности временных аргументов, т.е. является стационарной. Для удобства физической интерпретации вместо k вводят в рассмотрение коэффициент $\tau = 1 / k$, имеющий размерность [время]. Параметр называется постоянной времени системы и полностью характеризует ее поведение во времени. Более подробно, этот параметр определяет скорость, с которой уменьшается функция отклика (не переработанная информация). Окончательно экспоненциальную функцию отклика запишем в вид

$$h(t, W_i, u_i, \theta_i) = u_i \exp\left(-\frac{\theta_i(t-W_i)}{\tau}\right), t \geq W_i. \quad (3.4)$$

Экспоненциальная функция отклика (3.4) широко применяется в физике и технике для описания убывающих процессов в связи с естественностью сделанных при ее выводе предположений. Постоянная времени определяет масштаб времени, в течение которого имеет смысл рассматривать поведение отклика.

В связи этим необходимо еще раз подчеркнуть, что приведенная математическая модель остается оправданной, если безразмерное произведение $\tau\lambda(t)$ равно нескольким единицам. Действительно, функция интенсивности $\lambda(t)$ определяет среднее число точек на временном интервале, а постоянная τ — время реагирования системы на эти точки. Если $\tau\lambda(t) \gg 1$ то теряется характерная дискретность процесса и для его описания можно привлечь более простые модели, а если $\tau\lambda(t) \ll 1$, то точечный процесс с точки зрения реакции системы распадается на единичные события и изучение ее динамики может быть проведено методами меченых (а не фильтрованных) процессов.

Изложенные особенности характерны, очевидно, для любой убывающей функции отклика, поэтому для любой функции отклика можно ввести в рассмотрение характерное время τ .

Для получения аналитического результата предположим, что функция интенсивности λ является постоянной, все значения u_i имеют одинаковое математическое ожидание $M\{u_i\} = n$, а все значения θ_i имеют одинаковое математическое ожидание $M\{\theta_i\} = 1$. Непосредственным вычислением в соответствии с (2.5) определим математическое ожидание на интервале времени $[0, t]$ фильтрованного пуассоновского процесса (3.4) с числом появившихся точек $N(t)$ и с функций отклика (3.1):

$$\begin{aligned} M_u y(t) &= \int_0^t \lambda(s) M\{h(t, s, u_i, \theta_i)\} ds = \\ &= \lambda e^{-\frac{tM\{\theta_i\}}{\tau}} M\{u_i\} \int_0^t e^{\frac{sM\{\theta_i\}}{\tau}} ds = \lambda \tau n \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Переработанная системой информация в соответствии с (2.8) принимает вид

$$M_u \hat{y}(t) = n\lambda t - n\lambda \tau (1 - e^{-t/\tau}). \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что интеграл (2.7) сходится, равен $\lambda \tau n$ и, поэтому, переработанная информация (2.8) неограниченно возрастает:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (n\lambda t - n\lambda \tau (1 - e^{-t/\tau})) = \lim_{t \rightarrow \infty} n\lambda t. \quad (3.7)$$

Таким образом, экспоненциальная функция, по-видимому, правильно описывающая некоторые аспекты переработки информации когнитивными системами,

является одним из примеров из бесконечного числа подобных функций.

Заключение

В работе предложена и аналитически исследована стохастическая модель динамики обработки информации в когнитивных системах, основанная на теории меченых точечных процессов. Ключевым результатом является формализация процесса обработки случайных информационных воздействий с учетом вариаций скорости их переработки.

Основные достижения работы включают:

1. Обоснование входного процесса: Моделирование поступления информации как неоднородного пуассоновского точечного процесса, где каждая точка (событие) помечена двумя независимыми случайными величинами: объемом информации u_i и коэффициентом скорости ее обработки θ_i .
2. Разработка динамической модели: Описание состояния системы (непереработанной информации) как фильтрованного пуассоновского процесса $y(t)$, представляющего сумму убывающих функций отклика $h(t, W_i, u_i, \theta_i)$ на каждое событие.
3. Аналитическое решение для экспоненциального отклика: Получены замкнутые выражения для математического ожидания количества переработанной $M\{\hat{y}(t)\}$ и непереработанной $M\{y(t)\}$ информации при использовании экспоненциальной функции отклика $h(t, W_i, u_i, \theta_i) = u_i \exp(-\theta_i(t - W_i) / \tau)$.
4. Условия применимости модели: Установлено, что модель наиболее адекватна при безразмерном параметре $\tau\lambda(t) \sim 1$, где τ — характерное время обработки системы, а $\lambda(t)$ — интенсивность поступления событий. При $\tau\lambda(t) \gg 1$ или $\tau\lambda(t) \ll 1$ модель упрощается.

Полученные результаты позволяют количественно оценивать:

- Текущую нагрузку на когнитивную систему (ожидаемый объем непереработанной информации).
- Производительность системы (темп переработки информации).
- Влияние вариаций скорости обработки разных типов информации (через распределение θ_i).

Предложенная модель создает основу для:

- Оптимизации управления: Планирования последовательности воздействий на когнитивные системы с учетом их текущего состояния и прогноза нагрузки.

- Проектирования систем: Формализации требований к когнитивным и интеллектуальным системам (например, к необходимой скорости обработки θ_i или допустимой интенсивности входного потока $\lambda(t)$).
- Дальнейших исследований: Обобщения на нелинейные функции отклика, коррелированные метки (u_i, θ_i) или более сложные (не пуассоновские) потоки событий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xue, N., Li, Y., Ding, D., Fan, Y. Analysis of Regularized Poisson GLM Spike-Train Modeling. // Journal of Physics: Conference Series. 2022. T. 2173.
2. Maity R. Statistical Methods in Hydrology and Hydroclimatology, Springer, New York City, New York, USA, 2018.
3. Nussinson, E., Ruimy, R., Elimelech, R., Israel, Y., Kaminer, I., Even-Haim, S. Quantum-Enhanced Microscopy Using Electron Number Pulses. // 2024 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO). 2024. C. 1–2
4. Pham C.T., Tran T.T. An algorithm for hybrid regularizers based image restoration with Poisson noise // Kybernetika. 2021. T. 57. № 3. C. 446–47.
5. Peters, J., Jones, L., Shibata, N., Katakami, S., Kusumi, T., Bekkevold, J., Ishikawa, R., Kawahara, K., Okada, M., Mullarkey, T. New Poisson denoising method for pulse-count STEM imaging. // Ultramicroscopy. 2024. T. 264. C. 113996
6. Bal A., Banerjee M., Chaki R., Sharma P. An efficient method for PET image denoising by combining multi-scale transform and non-local means // Multimedia Tools and Applications. 2020. T. 79. C. 29087–29120.
7. Diwakar M., Kumar M. A review on CT image noise and its denoising // Biomedical Signal Processing and Control. 2018. T. 42. C. 73–88.
8. Zeng G.L., Lv L., Huang Q. Poisson-noise weighted filter for time-of-flight positron emission tomography // Visual Computing for Industry, Biomedicine and Art. 2020. T. 3. № 10. C. 4.
9. Lamprinakou, S., Flaxman, S., Gandy, A., McCoy, E., Barahona, M., & Filippi, S. BART-based inference for Poisson processes. // Comput. Stat. Data Anal.. 2020. T. 180. C. 107658.
10. Snyder D.L., Miller M. Random Point Processes in Time and Space. Springer-Verlag, 1991. 480 с.

© Жовноватый Кирилл Евгеньевич (kirill.zhov@mail.ru)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»