

АППРОКСИМАЦИЯ ТОЧЕК ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ В ПАКЕТЕ WOLFRAM MATHEMATICA

APPROXIMATION OF POINTS BY POLYNOMIAL SURFACES IN THE WOLFRAM MATHEMATICA PACKAGE

A. Ivashchenko
D. Vavanov

Summary. Variants of approximation of an array of points in three-dimensional space by surfaces described by polynomial equations are considered. A practical task was set: to generate a surface from the known coordinates of points in three-dimensional space, and then use it with BIM modeling tools as a topographic surface. It is possible to approximate points in three-dimensional space with different surfaces, and since the relief of the untreated earth's surface is generally random, no restrictions are imposed on the nature of the surface, except that it must be described by the equation: $z=f(x, y)$. The results are analyzed in terms of the reliability of the obtained relief and the complexity of the equation.

Keywords: surface approximation, approximation algorithms, array processing, topographic surface, Mathematica program, Revit package.

Иващенко Андрей Викторович

Доцент, Московский государственный
строительный университет
ivashchenko_a@inbox.ru

Ваванов Дмитрий Алексеевич

Преподаватель, Московский государственный
строительный университет
kohinor51@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены варианты аппроксимации массива точек в трехмерном пространстве поверхностями, описываемыми полиномиальными уравнениями. Ставилась практическая задача: по известным координатам точек в трехмерном пространстве сгенерировать поверхность, и затем использовать ее средствами BIM-моделирования в качестве топографической поверхности. Аппроксимировать точки в трехмерном пространстве можно разными поверхностями, а поскольку рельеф необработанной поверхности земли в общем случае имеет случайный характер, то никаких ограничений на характер поверхности не накладывается, за исключением того, что она должна описываться уравнением: $z=f(x, y)$. Результаты проанализированы с точки зрения достоверности полученного рельефа и сложности уравнения.

Ключевые слова: аппроксимация поверхности, алгоритмы аппроксимации, обработка массивов, топографическая поверхность, программа Mathematica, пакет Revit.

Объекты, рассматриваемые в вычислительной геометрии, обычно задаются множествами точек в евклидовом пространстве [1, с.29].

Ставилась практическая задача: по известным координатам точек в трехмерном пространстве, заданных в общем случае случайным образом, сгенерировать поверхность, и затем использовать ее в пакете REVIT в качестве топографической поверхности. Известно, что аппроксимировать точки в трехмерном пространстве можно разными поверхностями, а поскольку рельеф необработанной поверхности земли в общем случае имеет случайный характер, то никаких ограничений на характер поверхности не накладывается, за исключением того, что она должна описываться уравнением: $z=f(x, y)$. Таким образом, каждой точке горизонтальной проекции поверхности должно соответствовать единственное значение высоты, и, тем самым, исключаются складчатые поверхности: гроты, пещеры, тоннели и т.п. Подобная задача может быть рассмотрена как задача минимизации функции суммы квадратов отклонений аппроксимирующей поверхности от исходных точек

при заданной степени аппроксимирующей поверхности [2, с. 427]. Порядок поверхности не зависит от системы координат, а характеризует саму поверхность [4, с. 461].

Выполнялась следующая последовательность действий при генерации топографической поверхности в REVIT: вначале по исходным данным (координатам точек в трехмерном пространстве) генерировалась поверхность и ее горизонтальные срезы, затем поверхность и полученные кривые экспортировались в формат dxf, после чего обрабатывались в AutoCAD (им придавалась соответствующая высота). На последнем этапе обработанные кривые использовались в REVIT, на их основе формировалась топографическая поверхность. В данной статье рассматривается первый этап вышеописанной процедуры.

В качестве исходных данных были приняты точки, горизонтальные проекции которых находятся в узлах сетки с целочисленными координатами x и y в прямоугольной области с координатами нижнего левого угла

Таблица 1

$y \setminus x$	1	2	3	4	5
1	0.36	0.21	0.34	0.42	0.35
2	0.15	0.08	0.78	0.18	0.85
3	0.79	1.97	2.0	1.27	1.77
4	0.53	0.12	1.36	1.83	1.31
5	1.25	0.31	0.03	0.26	1.98

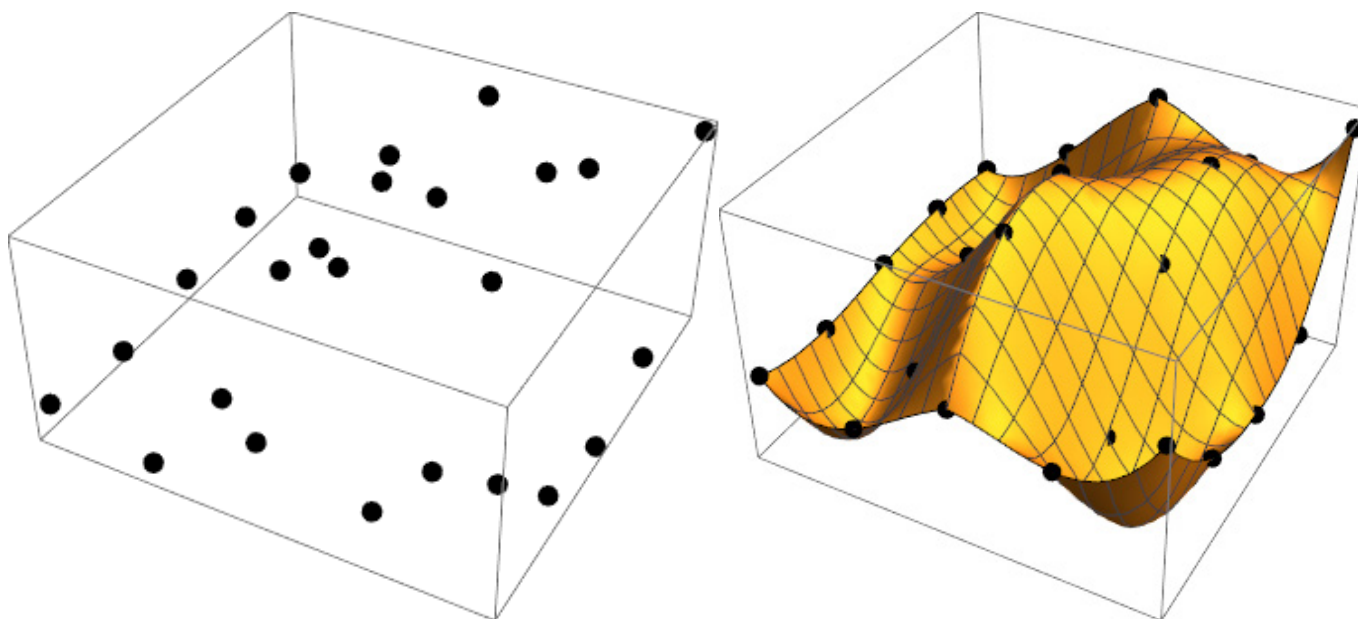


Рис. 1. Исходные точки и интерполяционная поверхность

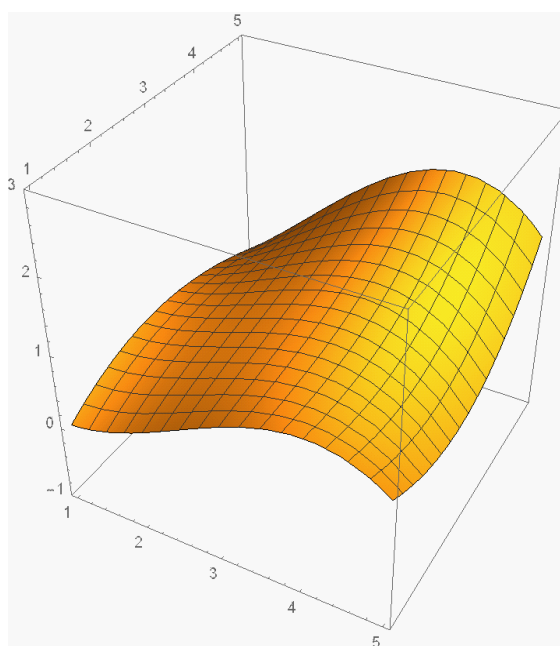


Рис. 2. Аппроксимационная поверхность третьей степени

Таблица 2

$y \setminus x$	1	2	3	4	5
1	-0,3314588	0,1780551	0,1361416	-0,0631991	-0,2559668
2	0,1741983	0,5133836	-0,0421443	0,6416148	0,0586611
3	0,0174272	-1,0421447	-0,9297156	0,0287147	-0,0928536
4	0,5412281	0,8644704	-0,2935721	-0,4488992	0,6824893
5	-0,5413988	0,0462291	-0,2935721	0,4017733	-0,53231

Таблица 3

$y \setminus x$	1	2	3	4	5
1	0,05047333	-0,03789836	0,02580811	-0,28240328	0,24347225
2	-0,15327164	0,27722128	0,02924192	0,28779424	-0,442117
3	0,10331899	-0,57801748	-0,01286627	0,49277656	-0,00708425
4	0,04026542	0,51040576	-0,22249586	-0,68543552	0,3545915
5	-0,04241215	-0,1734886	0,17837375	0,1851788	-0,15106875

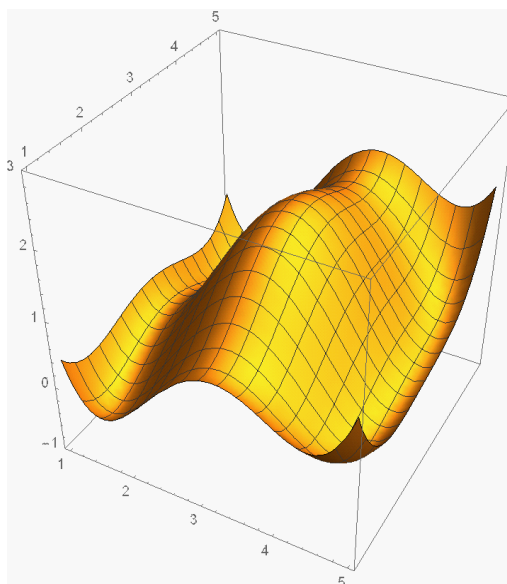


Рис. 3. Аппроксимационная поверхность четвертой степени

0,0, и правого верхнего — 5,5. Координаты z варьируются в диапазоне от 0 до 2.

В таблице 1 представлены исходные данные.

В пакете Wolfram Mathematica были написана программа вычисления коэффициентов соответствующей аппроксимирующей поверхности, и затем сгенерированы трехмерные изображения, показывающие исходные точки и проходящую через них поверхность в заданном диапазоне значений [3, с. 83]. Надо отметить, что за пределами рассматриваемого диапазона интерполяционные и аппроксимирующие поверхно-

сти могут существенно расходиться с исходным рельефом.

В качестве уравнений аппроксимационных поверхностей подбирались полиномы второй степени от переменных x и y , начиная от степени 2 и выше.

Поскольку рельеф местности холмистый, и аппроксимация плоскостью заведомо не подходила, то рассматривались уравнения со степенями от 2 до 8.

Поверхность второго порядка, описываемая уравнением:

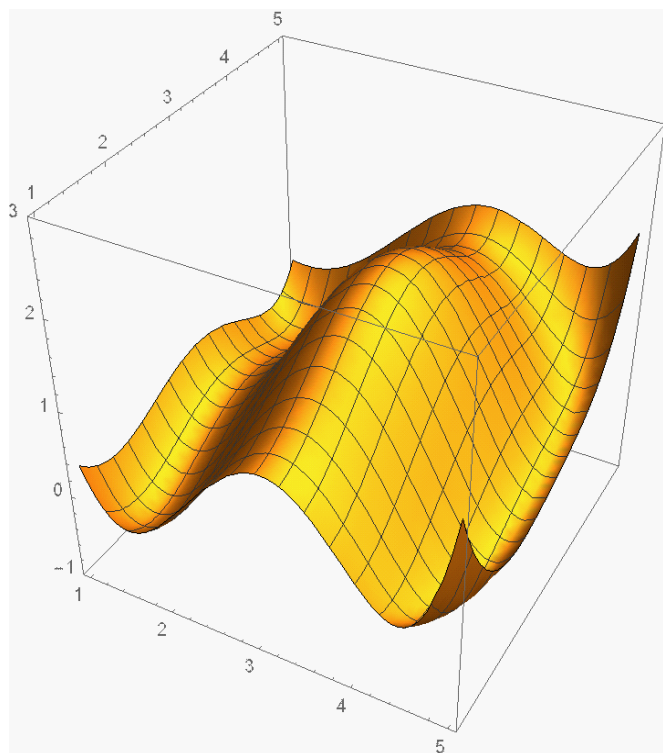


Рис. 4. Аппроксимационная поверхность пятой степени

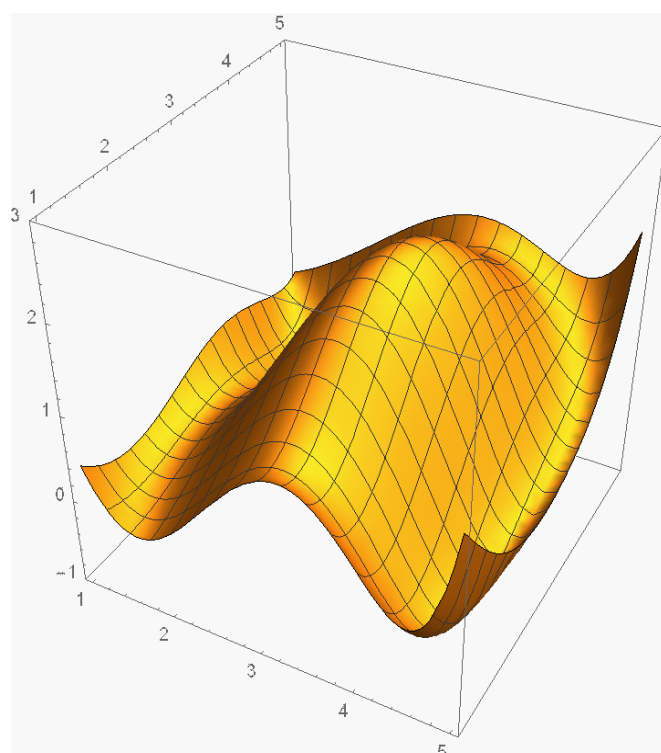


Рис. 5. Аппроксимационная поверхность шестой степени

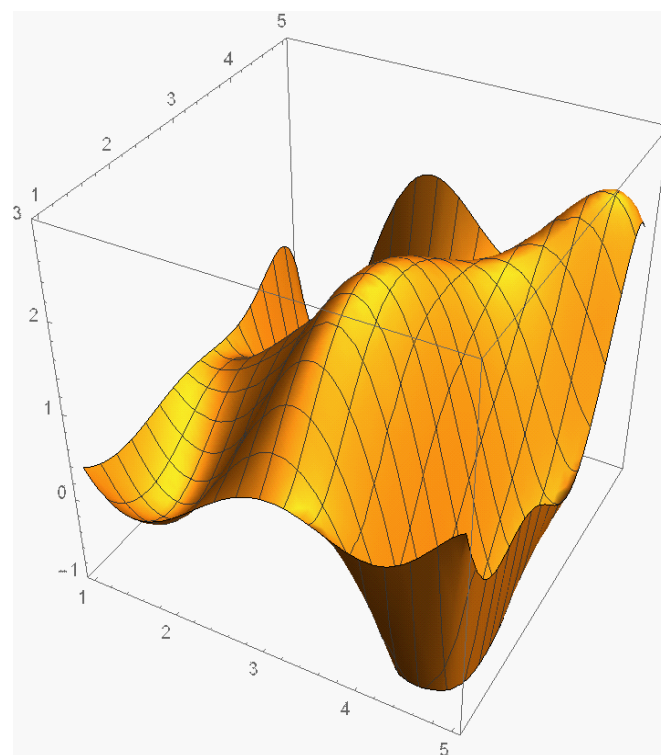
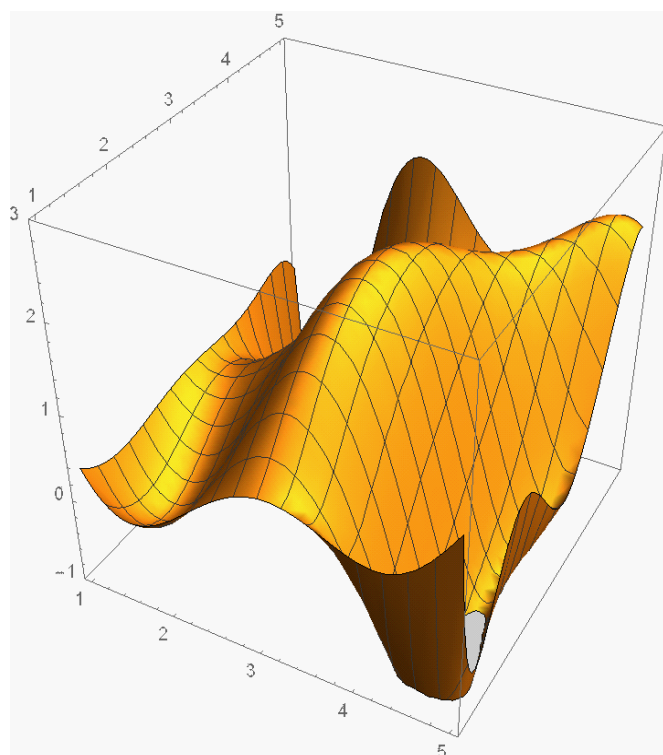


Рис. 6. Аппроксимационные поверхности седьмой и восьмой степеней.

$$z = -0.5795 + 1.03076 \cdot x - 0.168143 \cdot x^2 - 0.2317 \cdot y + 0.0421 \cdot x \cdot y + 0.043 \cdot y^2$$

слишком грубо описывает конкретный рельеф, и поэтому тоже не подходит (но надо отметить, что в отдельных случаях при подходящем рельефе может быть принята в качестве рабочей модели).

Поверхность третьего порядка описывается уравнением:

$$z = -0.5461 - 0.582467 \cdot x + 0.53 \cdot x^2 - 0.0678333 \cdot x^3 + 1.13596 \cdot y - 0.222757 \cdot x \cdot y - 0.0292143 \cdot x^2 \cdot y - 0.273071 \cdot y^2 + 0.0733571 \cdot x \cdot y^2 + 0.0106667 \cdot y^3$$

Абсолютные отклонения в узлах координат z точек поверхности от координат z исходных точек приведены в таблице 2:

Сумма квадратов отклонений по всем узловым точкам составляет $d=5,518$.

Поверхность четвертого порядка описывается уравнением:

$$z = 14.4576 - 18.7351 \cdot x + 10.341 \cdot x^2 - 2.36483 \cdot x^3 + 0.19625 \cdot x^4 - 8.4513 \cdot y + 2.30863 \cdot x \cdot y - 0.37348 \cdot x^2 \cdot y - 0.0193333 \cdot x^3 \cdot y + 4.2404 \cdot y^2 - 0.398408 \cdot x \cdot y^2 + 0.0863776 \cdot x^2 \cdot y^2 - 0.953833 \cdot y^3 - 0.00516667 \cdot x \cdot y^3 + 0.0816667 \cdot y^4$$

Абсолютные отклонения в узлах координат z точек поверхности от координат z исходных точек приведены в следующей таблице 3:

Сумма квадратов отклонений по всем узловым точкам составляет $d=2,139$

Поверхность пятого порядка описывается уравнением:

$$z = 9.95917 - 11.9974 \cdot x + 5.3402 \cdot x^2 - 0.378728 \cdot x^3 - 0.233563 \cdot x^4 + 0.0369208 \cdot x^5 - 4.64001 \cdot y +$$

$$0.632063 \cdot x \cdot y - 0.0873844 \cdot x^2 \cdot y + 0.18881 \cdot x^3 \cdot y - 0.0413333 \cdot x^4 \cdot y + 1.88411 \cdot y^2 + 0.0166395 \cdot x \cdot y^2 - 0.247908 \cdot x^2 \cdot y^2 + 0.0479762 \cdot x^3 \cdot y^2 - 0.132351 \cdot y^3 + 0.0918333 \cdot x \cdot y^3 - 0.0108333 \cdot x^2 \cdot y^3 - 0.0856244 \cdot y^4 - 0.00266667 \cdot x \cdot y^4 + 0.0116861 \cdot y^5$$

Сумма квадратов отклонений по всем узловым точкам составляет $d=1,51$

Поверхность шестого порядка описывается уравнением:

$$z = 12.3404 - 15.4088 \cdot x + 4.93615 \cdot x^2 + 0.309821 \cdot x^3 - 0.158091 \cdot x^4 - 0.0286202 \cdot x^5 + 0.00595639 \cdot x^6 - 9.99677 \cdot y + 11.9942 \cdot x \cdot y - 4.44268 \cdot x^2 \cdot y - 0.0361778 \cdot x^3 \cdot y + 0.145788 \cdot x^4 \cdot y - 0.00826045 \cdot x^5 \cdot y + 2.68901 \cdot y^2 - 3.97562 \cdot x \cdot y^2 + 2.39112 \cdot x^2 \cdot y^2 - 0.296845 \cdot x^3 \cdot y^2 - 0.0105357 \cdot x^4 \cdot y^2 + 0.270762 \cdot y^3 - 0.162301 \cdot x \cdot y^3 - 0.220655 \cdot x^2 \cdot y^3 + 0.0523611 \cdot x^3 \cdot y^3 - 0.0646768 \cdot y^4 + 0.114157 \cdot x \cdot y^4 - 0.0217857 \cdot x^2 \cdot y^4 - 0.0157189 \cdot y^5 + 0.000926063 \cdot x \cdot y^5 + 0.00169734 \cdot y^6$$

Сумма квадратов отклонений по всем узловым точкам составляет $d=0,874$

Можно видеть, что с повышением степени от 3 до 6 варианты аппроксимационных поверхностей все более точно описывают рельеф, однако при дальнейшем повышении степени у них начинают появляться неожиданные «холмы» и «провалы», отсутствующие в рельефе, несмотря на то, что в узловых точках сумма квадратов отклонений уменьшается (что свидетельствует о более точном совпадении окрестностей точек в узлах с исходными данными рельефа).

Вывод

В результате проведенного анализа видно, что степень аппроксимационной поверхности влияет как на точность ее совпадения с узловыми точками, так и на характер межузлового изменения. Для небольших массивов исходных данных целесообразно воспользоваться пятой в качестве аппроксимационного уравнения полиномом пятой или шестой степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Препарата, М. Шеймос. Вычислительная геометрия. М.: Изд-во Мир. 1989. 480 С.
2. С. Скиена. Алгоритмы. Руководство по разработке. СПб: Изд-во «БХВ-Петербург». 2021. 720 С.
3. Воробьев Е.М. Введение в систему «Математика». М.: Изд-во «Финансы и статистика». 1998. 262 С.
4. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. М.: Изд-во «Либроком». 2019. 556 С.