

ОБ ЭНЕРГИИ И СТРУКТУРЕ СПАРЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Островский Николай Владимирович,
Вятский государственный университет (г. Киров),
Onv1@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена спаренным электронам. В начале на основе модели атома Бора и использованием величин энергии ионизации электронов вычислены эффективные заряды ядра. При этом найдено, что эффект экранирования от $1s^2$ -электронов значительно больше двух, в то время как внутри пары электронов он меньше единицы. Это не согласуется с представлением о сферической симметрии в распределении заряда s -электронов. Далее рассмотрена бициклическая модель спаренных электронов. Для построения равновесной модели предложено оригинальное уравнение электростатического взаимодействия между спаренными электронами.

Ключевые слова: спаренные электроны, энергия ионизации, квантово-механический расчёт, водород, гелий, литий, бериллий, бор, углерод, азот, кислород.

ABOUT ENERGY AND STRUCTURE OF COUPLED ELECTRONS

Ostrovskiy Nikolay Vladimirovich,
Vytk State University (Kirov)

Abstract. The article is devoted to structure of coupled electrons. At the first part on the basis of Bohr's atomic model and by use of energy value of electron's ionization are made calculations of effective charge values of nucleus. Thus it is found, that the screening effect from $1s^2$ -electrons is much more than two, while in electron's pair it is less than unit. It puts under doubt spherical symmetry in a distribution of a s -electron charge. Further reviewed the bicyclical model of coupled electrons. For the construction of equilibrium model invited the original equation of electrostatic interaction between the coupled electrons.

Key words: coupled electrons, ionization energy, quantum-mechanical calculation, hydrogen, helium, lithium, beryllium, boron, carbon, nitrogen, oxygen.

Введение

Данная работа направлена на разгадку тайну спаренных электронов, для которых пространственная структура и механизм взаимодействия до сих пор не вполне понятны. В качестве методической основы используется атомная модель Бора, модифицированная на основе современных научных достижений и авторских идей.

В докладе [1] были проанализированы энергии основных состояний и потенциалы ионизации двухэлектронных систем: гидрид иона, атома гелия, иона лития Li^+ и иона бериллия Be^{+2} . При этом было показано, что зависимость величины энергии ионизации в двухэлектронных системах от заряда

ядра с высокой степенью корреляции ($R^2=1,000$) описывается уравнением, эрг:

$$E_{ion} = 2,180 \cdot 10^{-11} Z^2 - 2,720 \cdot 10^{-11} Z + 6,610 \cdot 10^{-12},$$

где Z – заряд ядра. (1)

Первый член в уравнении (1) представляет собой Боровскую энергию электрона в одноэлектронной системе. Тогда второй и третий члены отражают энергию взаимодействия между электронами.

Если расхождение между энергией основного состояния двухэлектронных систем, вычисленных как удвоенная величина Боровской энергии индивидуального электрона, и экспериментальным значением обработать как зависимость от величины обратного радиуса Боровской орбиты электрона, то

с коэффициентом корреляции $R^2=1,000$ мы получаем уравнение, эрг:

$$\Delta E = 1,440 \cdot 10^{-19} \times 1/r_z - 6,620 \cdot 10^{-12}. \quad (2)$$

Но многолетние размышления, направленные на физическую интерпретацию этих величин, не дали какого-либо значимого результата.

1. Теория

Боровская модель основана на уравнении движения электрона в центральном поле ядра [2]:

$$\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (3)$$

где e , m , v и r – соответственно заряд, масса, скорость движения и радиус орбиты электрона.

Из уравнения (2) следует, что кинетическая энергия по модулю равна половине потенциальной энергии. Поскольку величина потенциальной энергии принимается как величина отрицательная, то полная энергия электрона будет равна половине его потенциальной энергии. Величина потенциальной энергии тела в центральном поле равна произведению силы на расстояние:

$$E_p = -F_E r, \quad (4)$$

В модели Бора постулировано, что момент количества движения электрона (угловой момент) равен [2]:

$K = mvr = nh/2\pi$, где n – номер орбиты, h – постоянная Планка (5)

Если в левой части уравнения (3) поставить обобщённое выражение для силы электростатического взаимодействия электрона с ядром, а величину скорости движения электрона выразить из уравнения (5), то мы получим связь между силой и радиусом орбиты электрона:

$$F_E = \frac{mn^2h^2}{4\pi^2 m^2 r^3}, \quad (6)$$

Разделив обе части уравнения (6) на e^2 и приняв во внимание, что радиус орбиты электрона в основном состоянии атома водорода равен:

$$a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}, \quad (7)$$

получим [3]:

$$\frac{F_E}{e^2} = \frac{n^2 a_0}{r^3}. \quad (8)$$

Теперь выразим F_E через полную энергия электрона и получим уравнение для нахождения величины радиуса орбиты электрона:

$$-\frac{2E_S}{e^2 r} = \frac{a_0}{r^3} \Rightarrow r = \sqrt{-\frac{a_0 e^2}{2E_S}}. \quad (9)$$

Для одноэлектронных систем в модели Бора справедливы соотношения:

$$r = a_0 / Z \quad (10)$$

и

$$E_S = E_H Z^2, \quad (11)$$

где E_H – энергия электрона в атоме водорода ($2,178 \cdot 10^{-11}$ эрг).

Таким образом, зная энергию электрона в многоэлектронных системах, мы можем оценить радиус его орбиты и величину эффективного заряда, воздействующего на электрон.

Но, как будет показано ниже, это не всегда ведёт к выводам, адекватным физической реальности.

Главной особенностью любой системы, находящейся в стационарном состоянии, является равновесие между отдельными элементами. Поэтому главной темой этой работы будет поиск структуры, обладающей данным свойством.

Основной проблемой описания электростатических взаимодействий в сложных системах непригодность уравнения Кулона для этих целей [4, с. 268]. В работе [5] для описания взаимодействия между электроном и ядром в присутствии другого электрона вводилась поправка, учитывающая взаимодействие между электронами. При этом результат взаимодействия был описан как сумма (интеграл) взаимодействий между отдельными элементами заряда величиной $eda/2\pi$, где da – элемент дуги орбиты электрона. В результате было получено уравнение типа:

$$F_E = \frac{Ze^2}{r^2} - \frac{re^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta(\alpha) d\alpha}{r_e^3(\alpha)}, \quad (12)$$

где: r_e – расстояние между элементами зарядов взаимодействующих электронов,

β – угол между r и r_e ,

α – угол между начальным и текущим положением элементов заряда (элементов дуги) на круговой орбите при интегрировании.

2. Расчёт орбитальных параметров электронов исходя из величины энергии

Мы начнём с того, что проанализируем результаты расчётов параметров орбит электронов исходя из величины энергии ионизации с использованием

описанного выше алгоритма (см. табл. 1). Результаты расчётов выражены в атомных единицах: радиуса – равного радиусу орбиты электрона в атоме водорода ($a_0 = 5,292 \cdot 10^{-9}$ см), силы – равной силе электростатического притяжения, действующий на электрон в атоме водорода ($F_0 = 0.00824$ дин), энергии – равной потенциальной энергии электрона в атоме водорода

Таблица 1

Результаты расчёта параметров орбит электронов исходя из энергии ионизации

<i>M</i>	Энергия ионизации, а. е. [9]	<i>r</i> , а. е.	F_E , а. е.	<i>Z</i> (<i>Z'</i>)	$Z_{ЭГ}$
1s ¹ -электроны					
H	0.500	1,000	1,000	1	1,000
He ⁺	2.001	0,500	8,000	2	2,000
Li ⁺²	4.003	0,333	27,00	3	3,000
Be ⁺³	8.005	0,250	64,00	4	4,000
1s ² -электроны					
H ⁻	0,1209	4,245	0,0131	1	0,235
He	3,939	0,744	2,431	2	1,344
Li ⁺	12,12	0,424	13,12	3	2,358
Be ⁺²	24,65	0,297	38,07	4	3,363
B ⁺³	41,55	0,229	83,30	5	4,366
C ⁺⁴	62,81	0,186	154,8	6	5,368
N ⁺⁵	88,44	0,157	258,7	7	6,370
O ⁺⁶	118,4	0,136	400,9	8	7,371
2s ¹ -электроны					
Li	0,8523	1,599	0,245	3 (1)	0,625
Be ⁺	2,918	0,864	1,550	4 (2)	1,157
B ⁺²	6,077	0,599	4,659	5 (3)	1,670
C ⁺³	10,33	0,459	10,33	6 (4)	2,177
N ⁺⁴	15,67	0,373	19,30	7 (5)	2,682
O ⁺⁵	22,13	0,314	32,37	8 (6)	3,186
2s ² -электроны					
Li ⁻	0,0990	4,692	0,0097	3 (1)	0,213
Be	1,492	1,208	0,567	4 (2)	0,827
B ⁺	4,030	0,735	2,516	5 (3)	1,360
C ⁺²	7,671	0,533	6,608	6 (4)	1,876
N ⁺³	12,41	0,419	13,60	7 (5)	2,386
O ⁺⁴	18,25	0,346	24,24	8 (6)	2,893

Примечание: $Z' = Z - 2$.

(1 Хартри = $4,357 \cdot 10^{-11}$ эрг). Другие атомные величины равны: $m = 9,1091 \cdot 10^{-28}$ г, $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ см^{3/2} э^{1/2} с⁻¹, $c = 2,9979 \cdot 10^{10}$ см /с, $h = 6,6256 \cdot 10^{-27}$ эрг·с [6].

Прежде всего, обратим внимание на то, что найденный эффект экранирования ядра $1s^2$ электронами значительно больше того, что мы могли бы ожидать и сходя из сферического распределения электронной плотности и закона Кулона для описания электростатического поля.

В рамках теории Шрёдингера предполагается, что распределение заряда у $1s^2$ электронов описывается функцией, обладающей сферической симметрией [7, с. 74]. При этом, в теории Шрёдингера для описания электростатического взаимодействия между зарядами используется уравнение Кулона (см. левую часть уравнения (3)), математическая форма которого аналогична уравнению Ньютона для описания гравитационного взаимодействия. Между тем Ньютоном было показано, что сила, действующая на частицу, находящуюся вне сферы, обратно пропорциональна квадрату расстояния от частицы до центра сферы [8, с. 245]. То есть, воздействие на внешний электрон внутренних электронов,

должно иметь ту же зависимость от расстояния, что и воздействие ядра. Тогда эффективный заряд, воздействующий на внешний электрон, был бы точно равен разности между зарядом ядра и числом внутренних электронов. Но мы получили иные результаты. Причём, если для экранирования $2s$ электрона внутренними $1s^2$ электронами эффект превышает число электронов (Li, Be⁺, B⁺², C⁺³, N⁺⁴, O⁺⁵), то для взаимодействия внутри пары s -электронов он существенно меньше единицы. Это говорит о том, что: либо распределение заряда для s -электронов не обладает сферической симметрией, либо электростатическое взаимодействие не подчиняется закону Кулона.

Хотя s^2 -электроны имеют различные энергии ионизации, спектральные данные свидетельствуют о том, что в отсутствие внешнего магнитного поля они имеют одинаковую энергию, но противоположенные магнитные моменты [7, с. 35, 75]. Поэтому теперь мы проведём аналогичные расчёты для усреднённой энергии s^2 -электронов, равной полусумме энергий последовательных ионизаций (см. табл. 2).

Таблица 2

Результаты расчёта параметров орбит s -электронов исходя их суммарной энергии

<i>M</i>	Усреднённая энергия s -электрона, а.е.	<i>r</i> , а.е.	F_E , а.е.	$Z (Z')$	Z_{eff}
$1s^2$-электроны					
H	-0,264	1,376	0,383	1	0,726
He	-1,453	0,587	4,948	2	1,704
Li ⁺	-3,642	0,371	19,64	3	2,698
Be ⁺²	-6,832	0,271	50,47	4	3,695
B ⁺³	-11,02	0,213	103,4	5	4,694
C ⁺⁴	-16,22	0,176	184,5	6	5,693
N ⁺⁵	-22,41	0,149	299,9	7	6,693
O ⁺⁶	-29,61	0,130	455,5	8	7,694
$2s^2$-электроны					
Li	-0,110	2,132	0,103	3 (1)	0,467
Be	-0,506	0,994	1,018	4 (2)	1,006
B ⁺	-1,160	0,657	3,534	5 (3)	1,523
C ⁺²	-2,066	0,492	8,399	6 (4)	2,032
N ⁺³	-3,224	0,394	16,37	7 (5)	3,590
O ⁺⁴	-4,634	0,328	28,22	8 (6)	4,306

Примечание: $Z' = Z - 2$.

Вычисленные значения эффективного заряда ядра для $1s^2$ -электронов близки к результатам, полученным в рамках теории Шрёдингера с использованием вариационного метода (т.е. подбора значения переменной, например, величины экранирования). При этом была введена постоянная поправка на экранирование заряда ядра, равная $5/16$ (0.313) [10, с.74-76]. Но физический смысл данной величины не вполне однозначен. Если оба электрона описываются одинаковыми сферическими функциями, то говорить об экранировании можно лишь условно. Если «экранирование» есть эквивалент отталкивания между электронами, то каким образом мы можем его оценить, не имея характеристик движения электронов вокруг ядра?

В работе [11] была выдвинута идея, что спаренные электроны в атомах обращаются в противоположных направлениях по круговым орбитам, которые сдвинуты относительно ядра. Это представление было использовано при построении модели трёхэлектронных систем $1s^2 2s^1$, в которой электроны движутся по круговым орбитам [5]. Причём плоскости орбит $1s$ -электронов симметрично сдвинуты относительно ядра, а плоскость орбиты $2s$ -электрона проходит между ними (и через ядро). Ошибка в вычислении энергии ионизации $2s$ -электрона оказалась в пределах от +1,3% отн. для Li до -0,4% для C^{+3} . Взаимодействие между спаренными электронами в данной работе не рассматривалось, а для вычисления их энергии использовалась поправка по уравнению (2).

Бициклическая модель (см. рис. 1), по крайней мере, на качественном уровне позволяет ответить на два вопроса. Во-первых, почему эффект экранирования между s -электронами одного уровня меньше, чем эффект экранирования $2s$ -электрона со стороны $1s^2$ -электронов? Во-вторых, почему энергия ионизации отличается от собственной энергии электрона?

Как видно из рисунка 1, как такового взаимного экранирования в системе спаренных электронов нет, но есть взаимное отталкивание, которое приводит к повышению их энергии по сравнению с энергией $1s^1$ -состояния.

Теперь рассмотрим процесс ионизации данной системы. Увеличение энергии электрона за счёт внешнего воздействия ведёт к увеличению радиуса его орбиты. При этом изменяется геометрия системы: возникает экранирование возбуждённого электрона

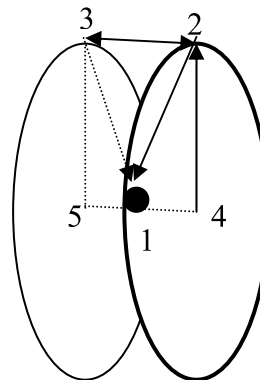


Рисунок 1. Бициклическая модель атома гелия: 1 – ядро, 2 и 3 – орбиты электронов, 4 и 5 – центры орбит электронов

со стороны невозбуждённого и собственная энергия каждого из электронов изменяется: верхнего – увеличивается, нижнего – уменьшается. В результате энергия ионизации первого из пары электронов оказывается меньше его собственной энергии.

3. Равновесие в системе спаренных электронов на основе закона Кулона

Если мы хотим дать не вероятностное описание системы, а поострить её физическую модель, мы должны объяснить физическую возможность её существования. В любой стационарной системе

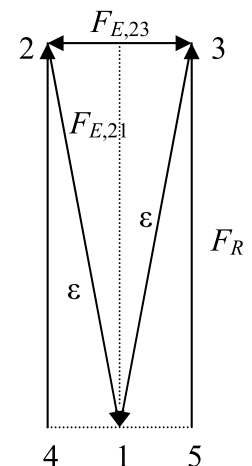


Рисунок 2. Равновесие в двухэлектронной системе: 1 – ядро атома, 2 и 3 – точки на орбитах электронов, 4 и 5 – центры орбит.

существует равновесие. В данной системе каждый электрон притягивается к ядру с силой $F_{E,21}$ и отталкивается от другого электрона с силой $F_{E,23}$ (см. рис. 2).

Равновесие в системе требует выполнение следующего условия:

$$2F_{E,21} \sin \varepsilon = -F_{E,23}, \quad (13)$$

где ε – угол между $F_{E,21}$ и плоскостью орбиты электрона.

Примем, что взаимодействие между зарядами описывается уравнением Кулона. Поскольку расстояние между электронами $r_{23} = 2r_{12} \sin \varepsilon$ равенство (13) преобразуется:

$$\begin{aligned} 2 \frac{Ze^2}{r_{12}^2} \sin \varepsilon &= \frac{e^2}{4r_{12}^2 \sin^2 \varepsilon} \Leftrightarrow 2Z \sin \varepsilon = \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \varepsilon} \Rightarrow \sin \varepsilon = \sqrt[3]{1/8Z}. \end{aligned} \quad (14)$$

В системе, описываемой рис. 1 и 2, центробежная сила F_R будет уравновешена проекцией $F_{E,21}$ на плоскость орбиты электрона. Тогда, подставив в уравнение (8) вместо $F_E - F_{E,21} \cos \varepsilon$, а вместо $r - r_{21} \cos \varepsilon$, мы получим:

$$r_{12} = \frac{a_0}{Z \cos^4 \varepsilon}. \quad (15)$$

Полная энергия каждого из электронов будет равна:

$$E_s = \frac{F_{E,21} r_{12} \cos^2 \varepsilon}{2} = \frac{Ze^2 \cos^2 \varepsilon}{2r_{12}} = \frac{Z^2 e^2}{2a_0} \cos^6 \varepsilon. \quad (16)$$

Таким образом, мы можем для любого значения Z рассчитать геометрию $1s^2$ -состояния и энергию электронов пользуясь лишь фундаментальными константами. Результаты расчётов представлены в табл. 3.

Как видно из таблицы, вычисленное значение полной энергии гидрид-иона равно $-0,422$ а.е. ($1,84 \cdot 10^{-11}$ эрг), что превышает энергию атома водорода $-0,500$ а.е. ($-2,18 \cdot 10^{-11}$ эрг). Таким образом, адекватное описание спаренных электронов с использованием уравнения Кулона оказывается невозможным.

4. Модификация уравнения электростатического взаимодействия

Дальнейший анализ мы построим на поиске поправки к уравнению Кулона. Пусть уравнение взаимодействия электрона с ядром имеет вид:

$$F_{E,21} = Ze^2/r_{12}^3 + \Delta F \quad (17)$$

В качестве основы для вычисления такой поправки был использован интеграл, входящий в уравнение (12):

$$Int(2,3) = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \beta d\alpha}{r_{23}^3}. \quad (18)$$

Что бы было понятнее, о чём идет речь перерисуем рис. 1, введя в него дополнительные обозначения (см. рис. 3): r_{23} – это расстояние между элементами зарядов взаимодействующих электронов, α – угол между начальным (3') и текущим (3) элементами, т.е. между $r_{53'}$ и r_{53} , β – угол между радиус-векторами взаимодействующих элементов заряда электронов, т.е. между r_{21} и r_{31} .

Таблица 3

Результаты расчётов для равновесной модели на основе уравнения Кулона

M	Z	ε , град	r_{12} , а. е.	r_{23} , а. е.	E_{Calc} , а. е.	E_{Exp} , а. е.	ΔE , а. е.	Δ_{Rel} %
H ⁻	1	30,00	1,778	1,778	-0,211	-0,264	0,053	20
He	2	23,38	0,704	0,559	-1,196	-1,453	0,26	18
Li ⁺	3	20,28	0,431	0,299	-3,065	-3,642	0,58	16
Be ⁺²	4	18,36	0,308	0,194	-5,847	-6,832	0,98	14
B ⁺³	5	17,00	0,239	0,140	-9,560	-11,02	1,5	13
C ⁺⁴	6	15,97	0,195	0,107	-14,21	-16,22	2,0	12
N ⁺⁵	7	15,15	0,165	0,086	-19,81	-22,41	2,6	12
O ⁺⁶	8	14,48	0,142	0,071	-26,37	-29,61	3,2	11

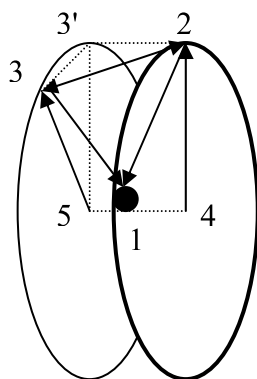


Рисунок 3. Схема для вычисления интеграла взаимодействия между электронами.

Найти подходящую связь между ΔF и $Int(2,3)$, а также выражение для F_{23} , с тем, чтобы они удовлетворяли уравнениям (9) и (13) оказалось не простой задачей. Было опробовано около десятка вариантов. Я не буду пытаться дать им какие-то теоретические обоснования, потому что, на мой взгляд, для этого пока нет надёжной основы. Наилучшие результаты (см. табл. 4) были получены для следующей системы уравнений:

$$F_{21} = \frac{Ze^2}{r_{21}^2} - r_{45} Int(2,3), \quad (19)$$

$$F_{23} = -\frac{a_0 r_{45}}{r_{21}} Int(2,3). \quad (20)$$

Состояние, соответствующее равновесию, достигается при угле 2ϵ между r_{21} и r_{31} (см. рис. 2) равном 13,86 град. Всё-таки найденные решения не являются абсолютно точными. Отклонение

от равновесия, т.е. разница между $-F_{23}$ и $2F_{21} \sin \epsilon$ составляет от 0,0003 атомных единиц силы для гидрид-иона до -2,4 – для иона кислорода O^{+6} . Впрочем, в последнем случае относительное отклонение (относительно абсолютного значения F_{23}) равно всего 0,5%.

Не удалось добиться абсолютной сходимости и с величиной r_{24} , соответствующей экспериментальному значению полной энергии системы (см. уравнение (8)). Относительные отклонения составляют от 0,1% для гелия до 0,5% для иона кислорода O^{+6} (для гидрид-иона – -0,3%).

И, всё же, относительную погрешность в вычислении полной энергии системы – от 0,3% для иона лития Li^+ до 1,5% для иона кислорода O^{+6} , можно считать вполне удовлетворительной. Найденное при этом сродство к электрону атома водорода – -0,34 а. е. отличается от экспериментальной величины (-0,28 а. е.) всего на 20%.

Рассмотренный тип спаренных электронов не является единственно возможным. Можно выделить ещё, крайней мере, два вида. Это неподделённые пары p -электронов, которые могут располагаться сбоку от ядра, и пары электронов, образующие химические связи, которые расположены между ядрами атомов. Когда нам удастся построить физические модели и для этих видов спаренных электронов можно будет перейти к обобщениям. По крайней мере, ответить на вопрос: являются ли уравнения (19) и (20) лишь относительно удовлетворительной математической моделью или же им отвечает некая физическая основа?

Таблица 4

Результаты расчётов для равновесной модели для уравнений (19) и (20)

M	r_{24} , а. е.	r_{45} , а. е.	$Int(2,3)$, а. е.	F_{21} , а. е.	F_{23} , а. е.	$E_{S,Calc}$ а. е.	ΔE_{Rel} %
H ⁻	1,3762	0,3344	0,389	0,390	-0,094	-0,267	-0,97
He	0,5866	0,1425	5,023	5,012	-1,212	-1,459	-0,43
Li ⁺¹	0,3705	0,0900	19,94	19,75	-4,810	-3,361	0,33
Be ⁺²	0,2705	0,0657	51,22	50,50	-12,36	-6,781	0,77
B ⁺³	0,2130	0,0517	105,0	103,2	-25,32	-10,91	1,0
C ⁺⁴	0,1756	0,0427	187,3	183,8	-45,18	-16,02	1,2
N ⁺⁵	0,1493	0,0363	304,4	298,2	-73,42	-22,11	1,4
O ⁺⁶	0,1299	0,0316	462,3	452,4	-111,5	-29,18	1,5

Список литературы

1. Островский Н.В. Об энергии основных состояний и энергии ионизации двухэлектронных атомов и ионов (на основе теории строения атома Нильса Бора).// Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции «Наука – производство – технологии – экология». Киров: Вятский государственный университет, 2008 т. 3, с. 197-199.
2. Бор Н. О строении атомов и молекул.//Избранные научные труды. Т. 1. – М.: Наука, 1970, с. 84-148.
3. Островский Н.В. Нахождение квантованного радиуса орбиты электрона.// Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2009): Материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции. – Томск: Издательство Томского университета, 2009, ч. 2, с. 152-155.
4. Соколов А.В., Лоскутов Ю.М., Тернов И.М. Квантовая механика. – М.: Просвещение, 1965. – 638 с.
5. Островский Н.В. Расчёт энергии ионизации трёхэлектронных систем на основе модифицированной модели атома Бора.//Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия «Естественные и технические науки», 2011, декабрь, с. 48-53.
6. Коттон Ф., Уилкинсон Дж. Современная неорганическая химия. Т. 1. – М.: Мир, 1969. – 224 с.
7. Дей К., Селбин Д. Теоретическая неорганическая химия. – М.: “Химия”, 1971. – 416 с.
8. Ньютон И. Математические начала натуральной философии./перевод с лат. А.Н. Крылова. – М.: Наука, 1989, с. 245.
9. Эмсли Дж. Элементы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 256 с.
10. Флюгге З. Задачи по квантовой механике, т. 2. – М: Мир, 1974, с. 74-76.
11. Островский Н.В. О природе спин-спинового взаимодействия. //Актуальные проблемы науки. Выпуск VI. – Кузнецк: КИИУТ, 2009, с. 48-53.