DOI 10.37882/2223-2966.2026.02-2.15

СТРОГОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ИСЛАУ

A STRICT SOLUTION SET TO ISLAE

F. Kachanov

Summary. The paper presents a new approach to determining the solution of interval systems of linear algebraic equations (ISAs), which differs from the classical set-theoretic interpretations. The concept of a strict solution set is introduced, which is defined as the set of interval vectors {X} for which the result of the standard interval multiplication [A] · {X} is in the absorption relation with a given right-hand side {B}. This definition is algebraic and computationally oriented, as it allows direct algorithmic verification taking into account machine error. The article also suggests a method for finding {X} and a method for verifying that the resulting solution belongs to a strict set of solutions.

In addition to the formal definition and illustrative example, the article examines the areas of practical application of the approach: from sustainable engineering design and solving interval inverse problems to formal verification of algorithms. The results show that a rigorous set of solutions offers a fundamentally new tool for tasks that require mathematically guaranteed results under conditions of parametric uncertainty.

Keywords: ISLAE, interval analysis, interval arithmetic, solution set, interval matrix, interval vector.

Качанов Федор Константинович
Аспирант,
МИРЭА — Российский технологический университет,
mirea@mirea.ru

Аннотация. В работе представлен новый подход к определению решения интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ), отличный от классических теоретико-множественных трактовок. Вводится понятие строгого множества решений, которое определяется как множество интервальных векторов {X}, для которых результат стандартного интервального умножения [A] · {X} находится в отношении поглощения с заданной правой частью {B}. Данное определение является алгебраическим и вычислительно ориентированным, так как допускает прямую алгоритмическую проверку с учётом машинной погрешности. Также в статье предлагается метод нахождения {X} и метод проверки принадлежности полученного решения строгому множеству решений.

Помимо формального определения и иллюстративного примера, в статье рассматриваются сферы практического применения подхода: от устойчивого инженерного проектирования и решения интервальных обратных задач до формальной верификации алгоритмов. Результаты показывают, что строгое множество решений предлагает принципиально новый инструмент для задач, требующих математически гарантированных результатов в условиях параметрической неопределённости.

Ключевые слова: ИСЛАУ, интервальный анализ, интервальная арифметика, множество решений, интервальная матрица, интервальный вектор.

Введение

Интервальная система линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) отличается от системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) тем, что она может содержать интервальные числа, т.е такие числа, которые записываются в виде:

$$\boldsymbol{x} = \left[\underline{x}, \overline{x}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x_{\text{ср}} - \Delta x \le x \le x_{\text{ср}} + \Delta x\right\} \quad (1)$$

где:

$\boldsymbol{x}$ — интервальное число, которое обычно записывается полужирным шрифтом;

$\underline{x}$ и $\overline{x}$ — нижняя и верхняя границы $\boldsymbol{x}$ соответственно;

$x_{\text{ср}}$ — среднее значение $\boldsymbol{x}$;

Δx — радиус $\boldsymbol{x}$ [1].

В общей форме ИСЛАУ записывается аналогично СЛАУ:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{1m}\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{b}_1 = 0 \\ \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{2m}\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{b}_2 = 0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{n1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{n2}\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_{nm}\boldsymbol{x}_m + \boldsymbol{b}_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где:

$\boldsymbol{a}_{ij}$ и $\boldsymbol{b}_i$ — интервальные коэффициенты с индексами $i \in 1, 2, \ldots, n$ и $j \in 1, 2, \ldots, m$;

$\boldsymbol{x}_j$ — интервальная неизвестная величина, которую необходимо определить.

В матричной форме ИСЛАУ записывается как равенство:

$$\left[\boldsymbol{A}\right] \cdot \left\{\boldsymbol{X}\right\} = \left\{\boldsymbol{B}\right\} \quad (3)$$

где:

интервальная матрица [***A***] состоит из интервальных элементов $\boldsymbol{a}_{ij}$;

интервальный вектор правой части {***B***} состоит из интервальных элементов $\boldsymbol{b}_i$;

интервальный вектор решения {***X***} состоит из интервальных элементов $\boldsymbol{x}_j$;

в таком контексте *i* — номер строки, а *j* — номер столбца матрицы [***A***].

В отличие от СЛАУ, для ИСЛАУ существуют различные определения решений, а точнее, множеств решений. На практике их можно упростить в связи с тем, что матрица [***A***] обычно квадратная, то есть, количество интервальных линейных алгебраических уравнений равно количеству интервальных неизвестных величин и равно *n*. В данной статье будем рассматривать только такой случай.

1. Обобщёнными множествами решений интервальной системы уравнений называют множества вида:

$$\left\{\begin{array}{l}\{X\} \in R^n | \left(Q_1 z_{\pi_1} \in \mathbf{z}_{\pi_1}\right)\left(Q_2 z_{\pi_2} \in \mathbf{z}_{\pi_2}\right)\cdots \\ \cdots\left(Q_{n^2+n} z_{\pi_{n^2+n}} \in \mathbf{z}_{\pi_{n^2+n}}\right)\left([A]\{X\} = \{B\}\right)\end{array}\right\} \quad (4)$$

где Q_1, Q_2, …, $Q_{n^\wedge 2+n}$ — логические кванторы ∀ или ∃; (z_1, z_2, …, $z_{n^\wedge 2+n}$) := (a_1, …, $a_{n^\wedge 2}$, b_1, …, b_n) ∈ $R_n^{\wedge 2+}{}_n$ — агрегированный вектор параметров рассматриваемой системы уравнений; ($\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, …, $\boldsymbol{z}_{n^\wedge 2+n}$) := ($\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_{n^\wedge 2}$, $\boldsymbol{b}_1$, …, $\boldsymbol{b}_n$) ∈ $IR^{n^\wedge 2+n}$ — агрегированный вектор интервалов возможных значений этих параметров; (π_1, π_2, …, $\pi_{n^\wedge 2+n}$) — некоторая перестановка натуральных чисел 1, 2, …, n^2+n.

Следующие множества решений являются частными случаями этого

2. Объединённым множеством решений называется множество

$$\left\{\{X\} \in R^n | \left(\exists[A] \in [\boldsymbol{A}]\right)\left(\exists\{B\} \in \{\boldsymbol{B}\}\right)\left([A]\{X\} = \{B\}\right)\right\} \quad (5)$$

Эта означает: «найдутся такие матрица [***A***] и вектор {***B***}, что равенство выполняется».

3. Допустимым множеством решений называется множество

$$\left\{\{X\} \in R^n | \left(\forall\{B\} \in \{\boldsymbol{B}\}\right)\left(\exists[A] \in [\boldsymbol{A}]\right)\left([A]\{X\} = \{B\}\right)\right\} \quad (6)$$

Эта означает: «для любого вектора {***B***} можно найти такую матрицу [***A***], что равенство выполняется».

4. Контрольным множеством решений называется множество

$$\left\{\{X\} \in R^n | \left(\forall[A] \in [\boldsymbol{A}]\right)\left(\exists\{B\} \in \{\boldsymbol{B}\}\right)\left([A]\{X\} = \{B\}\right)\right\} \quad (7)$$

Эта означает: «для любой матрицы [A] можно найти такой вектор {B}, что равенство выполняется» [2].

1. Другой подход к определению множества решений

Несмотря на свою фундаментальность, перечисленные множества решений обладают одним общим свойством: они описывают совокупность точечных решений, так называемую оболочку решений, но не дают единого интервального вектора, который можно было бы формально подставить в исходную систему. Иными словами, для них не выполняется прямое интервальное равенство (3). Это создаёт разрыв между абстрактным описанием решения и возможностью его алгебраической верификации. Для преодоления данного разрыва в данной статье будет рассмотрена концепция строгого множества решений, определяемого именно как множество таких интервальных векторов {**X**}, для которых равенство (3) выполняется в смысле стандартных операций интервальной арифметики.

Для начала разберёмся, как это будет работать с линейным уравнением вида:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (8)$$

Определение 1. Строгое множество решений интервального уравнения — это все значения интервальной неизвестной величины ***x***, при которых равенство выполняется.

То есть, при подстановке этого решения в исходное уравнение должно получиться тождество. Разберём на примере.

Пример 1.

Пусть ***a*** = [17, 18], а ***b*** = [187, 216].

Тогда уравнение (8) можно записать так:

$$[17,18] \cdot \boldsymbol{x} = [187,216] \quad (9)$$

Попробуем решить это уравнение классическим способом при помощи интервального деления:

$$\boldsymbol{x} = \frac{[187,216]}{[17,18]} = \left[\frac{187}{18},\frac{216}{17}\right] \approx [10.38,12.71] \quad (10)$$

Подставим результат в уравнение (9) для проверки:

$$\begin{aligned}&[17,18] \cdot [10.38,12.71] = \\ &= [17 \cdot 10.38, 18 \cdot 12.71] \approx [176.46,228.78] \neq \\ &\neq [187,216]\end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, тождество не получилось. Тогда попробуем определить, чему должны быть равны нижняя и верхняя границы ***x***, чтобы получилось тождество. Поскольку все границы ***a*** и ***b*** положительные, можно предположить, что обе границы ***x*** тоже положительные. Тогда, зная, что $\underline{x} \le \overline{x}$, границы ***b*** можно определить следующим образом:

$$\begin{cases}\underline{b} = \min\left(17\underline{x},17\overline{x},18\underline{x},18\overline{x}\right) = 17\underline{x} = 187 \\ \overline{b} = \max\left(17\underline{x},17\overline{x},18\underline{x},18\overline{x}\right) = 18\overline{x} = 216\end{cases} \quad (12)$$

Из чего следует:

$$\boldsymbol{x} = \left[\frac{187}{17}, \frac{216}{18}\right] = \left[11,12\right] \qquad (13)$$

Подставим результат в уравнение (9) для проверки:

$$\left[17,18\right] \cdot \left[11,12\right] = \left[17 \cdot 11, 18 \cdot 12\right] = \left[187,216\right] \qquad (14)$$

Таким образом, множество решений, полученное в (13) является строгим множеством решений.

2. Строгое решение интервальной системы линейных алгебраических уравнений

Интервальное уравнение (8), фактически, является частным случаем (3) с $n = 1$. На практике n может быть очень большим, в связи с чем для решения ИСЛАУ зачастую используются технические средства. Использование технических средств приводит к появлению погрешностей округления. Для интервальной арифметики было определено правило направленного округления в таком случае: нижняя граница интервала округляется всегда вниз, а верхняя — вверх [3]. Это приводит к существенному усложнению нахождения строгого множества решений ИСЛАУ. В данной работе рассмотрим простой случай — уменьшим строгость определения для учёта погрешности округления.

Определение 2. Строгое множество решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений — это множество всех интервальных векторов {***X***}, для которых вычисленный результат умножения поглощает исходную правую часть {***B***} с точностью до заранее выбранного малого неотрицательного параметра **ε**.

Для пояснения введём вектор {***E***} размером n^2, у которой каждый элемент является интервалом [–ε, ε]. Тогда для строгого множества решений должно быть истиной:

$$\left(\left[\boldsymbol{A}\right] \cdot \left\{\boldsymbol{X}\right\} \supseteq \left\{\boldsymbol{B}\right\}\right) \cap \left(\left[\boldsymbol{A}\right] \cdot \left\{\boldsymbol{X}\right\} \subseteq \left\{\boldsymbol{B}\right\} + \left\{\mathbf{E}\right\}\right) \qquad (15)$$

Параметр ε должен выбираться исключительно с учётом особенностей округления в процессе определения ***X***.

Простой пример: решим систему из 2 уравнений с 3 значащими цифрами после запятой. Параметр ε можно взять на один порядок больше, например, ε = 0.01.

Пример 2.

$$\begin{bmatrix} [3.532,3.536] & [1.764,1.767] \\ [1.246,1.249] & [2.987,2.991] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [\underline{x_1}, \overline{x_1}] \\ [\underline{x_2}, \overline{x_2}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [14.185,14.221] \\ [12.401,12.434] \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

Поскольку все значения положительные, можно разделить ИСЛАУ на 2 СЛАУ — по одной на нижнюю и верхнюю границы:

$$\begin{bmatrix} 3.532 & 1.764 \\ 1.246 & 2.987 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.185 \\ 12.401 \end{Bmatrix} \qquad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 3.536 & 1.767 \\ 1.249 & 2.991 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.221 \\ 12.434 \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

Дальше решаем их любым способом и выполняем направленное округление **x**: $\underline{x} = (2.453, 3.128)^T$, $\overline{x} = (2.458, 3.132)^T$.

Теперь сделаем проверку (15):

$$\begin{bmatrix} [3.532,3.536] & [1.764,1.767] \\ [1.246,1.249] & [2.987,2.991] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [2.453,2.458] \\ [3.128,3.132] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [14.181,14.226] \\ [12.399,12.438] \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

Как видно, [**A**] · {**X**} ⊇ {**B**}. Теперь добавим {**E**}:

$$\begin{Bmatrix} [14.185,14.221] \\ [12.401,12.434] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [-0.01,0.01] \\ [-0.01,0.01] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [14.175,14.231] \\ [12.391,12.444] \end{Bmatrix} \qquad (20)$$

Таким образом {**B**} + {**E**} ⊇ [**A**] · {**X**}.

3. Метод нахождения строгого множества решений

Указанный ранее метод решения ИСЛАУ при помощи разделения его на 2 СЛАУ подходит только при условии знакопостоянства [**A**]. Теперь найдём более общий метод и начнём с частного случая (8).

Задача нахождения такого **x**, фактически, является задачей восстановления одного множителя по известному второму множителю и произведению, а также, в отличие от интервального деления, является обратной для интервального умножения. Сложность заключается в использовании интервальным умножением необратимых функций «min» и «max».

Первым делом определим в каком случае **x** может быть найден, а точнее, могут быть найдены его нижняя и верхняя границы. В этом вопросе следует обратить внимание на знаки **a** и **x**. Разберём по 3 случая для каждого из них: интервал строго меньше 0, интервал строго больше 0 и интервал содержит 0 и составим таблицу 1.

Первое, на что стоит обратить внимание — это то, что не во всех случаях используются обе границы **x**. Это говорит о том, что случай 0 ∈ **a** необходимо рассмотреть

Таблица 1.

Результат работы функций «min» и «max»

	$\underline{x} \le \overline{x} < 0(\boldsymbol{x} < 0)$	$\underline{x} \le 0 \le \overline{x}(\boldsymbol{x} \ni 0)$	$0 < \underline{x} \le \overline{x}(\boldsymbol{x} > 0)$
$\underline{a} \le \overline{a} < 0(\boldsymbol{a} < 0)$	$\underline{b} = \overline{a} \cdot \overline{x}$ $\overline{b} = \underline{a} \cdot \underline{x}$	$\underline{b} = \underline{a} \cdot \overline{x}$ $\overline{b} = \underline{a} \cdot \underline{x}$	$\underline{b} = \underline{a} \cdot \overline{x}$ $\overline{b} = \overline{a} \cdot \underline{x}$
$\underline{a} \le 0 \le \overline{a}(\boldsymbol{a} \ni 0)$	$\underline{b} = \overline{a} \cdot \underline{x}$ $\overline{b} = \underline{a} \cdot \underline{x}$	$\underline{b} = \min(\underline{a} \cdot \overline{x}, \overline{a} \cdot \underline{x})$ $\overline{b} = \max(\overline{a} \cdot \overline{x}, \underline{a} \cdot \underline{x})$	$\underline{b} = \underline{a} \cdot \overline{x}$ $\overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{x}$
$0 < \underline{a} \le \overline{a}(\boldsymbol{a} > 0)$	$\underline{b} = \overline{a} \cdot \underline{x}$ $\overline{b} = \underline{a} \cdot \overline{x}$	$\underline{b} = \overline{a} \cdot \underline{x}$ $\overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{x}$	$\underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{x}$ $\overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{x}$

отдельно. Для ***a***, не содержащих 0, можно вывести простую формулу нахождения ***x***, уникальную для каждого случая:

$$\boldsymbol{x} = \left[\underline{b} / \underline{a}, \overline{b} / \overline{a}\right], \{\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{a} > 0\} \quad (21)$$

$$\boldsymbol{x} = \left[\underline{b} / \overline{a}, \overline{b} / \underline{a}\right], \{\boldsymbol{x}\langle 0, \boldsymbol{a}\rangle 0\} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{x} = \left[\underline{b} / \overline{a}, \overline{b} / \overline{a}\right], \{\boldsymbol{x} \ni 0, \boldsymbol{a} > 0\} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{x} = \left[\overline{b} / \overline{a}, \underline{b} / \underline{a}\right], \{\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{a} < 0\} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{x} = \left[\overline{b} / \underline{a}, \underline{b} / \overline{a}\right], \{\boldsymbol{x} < 0, \boldsymbol{a} < 0\} \quad (25)$$

$$\boldsymbol{x} = \left[\overline{b} / \underline{a}, \underline{b} / \underline{a}\right], \{\boldsymbol{x} \ni 0, \boldsymbol{a} < 0\} \quad (26)$$

Для понимания проблемы знакопеременного ***a*** используем пример.

Пример 3.

$$[-17, 18] \cdot [11, 12] = [-204, 216] \quad (27)$$

Попробуем восстановить ***x*** из ***a*** и ***b***, как в примере 1, но с использованием таблицы 1:

$$\begin{cases} \underline{b} = -17\overline{x} = -204 \\ \overline{b} = 18\overline{x} = 216 \end{cases} \quad (28)$$

Из чего следует:

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{-204}{-17} = 12 \\ \overline{x} = \dfrac{216}{18} = 12 \end{cases} \quad (29)$$

Что не даёт никакой информации о $\underline{x}$. Кроме того, в данной задаче считалось, что мы знаем все знаки, но на практике мы вполне можем не иметь никакой информации о знаках границ ***x***. Тем не менее, некоторая информации о $\underline{x}$ всё же имеется.

Во-первых, при работе с правильными интервалами $\underline{x} \le \overline{x}$, т.е $\underline{x} \le 12$.

Во-вторых, если $\underline{x} \le 0$, то поведение функций min и max меняется на другой столбец таблицы 1, то есть, с учётом (28), можно записать:

$$\begin{cases} \underline{b} = \min(-17\overline{x}, 18\underline{x}) = -17\overline{x} = -204 \\ \overline{b} = \max(-17\underline{x}, 18\overline{x}) = 18\overline{x} = 216 \end{cases} \quad (30)$$

Это значит, что:

$$\begin{cases} -17\overline{x} \le 18\underline{x} \\ -17\underline{x} \le 18\overline{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x} \ge \dfrac{-204}{18} \ge -11.334 \\ \underline{x} \ge \dfrac{216}{-17} \ge -12.706 \end{cases} \quad (31)$$

Таким образом $\underline{x} = [-11.334, 12]$ — нижняя граница множества ***x*** сама является множеством, причём исходное (27) значение 11 тоже в него входит. Тем не менее, наиболее корректным решением будет использование нижней границы этого множества в качестве нижней границы ***x***. Проверим, что всё правильно подстановкой в (27):

$$[-17, 18] \cdot [-11.334, 12] = [18 \cdot -11.334, 18 \cdot 12] = \\ = [-204.012, 216] \quad (32)$$

Разница с (27) появилась в связи с округлением $\underline{x}$, можно считать, что она не превышает ε.

Теперь можно сформулировать решение для такого случая:

$$\boldsymbol{x} = \left[\min\left(\underline{b} / \overline{a}, \overline{b} / \underline{a}\right), \max\left(\underline{b} / \underline{a}, \overline{b} / \overline{a}\right)\right], \\ \{\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{a} \ni 0\} \quad (33)$$

Аналогичным образом выводятся:

$$\boldsymbol{x} = \left[\min\left(\underline{b} / \overline{a}, \overline{b} / \underline{a}\right), \max\left(\underline{b} / \underline{a}, \overline{b} / \overline{a}\right)\right], \\ \{\boldsymbol{x} < 0, \boldsymbol{a} \ni 0\} \quad (34)$$

$$\boldsymbol{x} = \left[\min\left(\underline{b} / \overline{a}, \overline{b} / \underline{a}\right), \max\left(\underline{b} / \underline{a}, \overline{b} / \overline{a}\right)\right], \\ \left\{\boldsymbol{x} \ni 0, \boldsymbol{a} \ni 0\right\} \tag{35}$$

На основании таблицы 1, примера 3 и формул (33–35) можно сделать вывод, что при $\boldsymbol{a} \ni 0$ обе границы $\boldsymbol{x}$ могут быть восстановлены только в том случае, когда выполняется следующее условие:

$$\left(\left|\underline{a} \cdot \underline{x}\right| < \left|\overline{a} \cdot \overline{x}\right|\right) \bigcap \left(\left|\underline{a} \cdot \overline{x}\right| < \left|\overline{a} \cdot \underline{x}\right|\right) \bigcup \\ \bigcup \left(\left|\underline{a} \cdot \underline{x}\right| > \left|\overline{a} \cdot \overline{x}\right|\right) \bigcap \left(\left|\underline{a} \cdot \overline{x}\right| > \left|\overline{a} \cdot \underline{x}\right|\right) \tag{36}$$

Однако, для соответствия определению 2 восстанавливать обе границы $\boldsymbol{x}$ не требуется. В таком случае можно объединить формулы (33–35) в одну:

$$\boldsymbol{x} = \left[\min\left(\underline{b} / \overline{a}, \overline{b} / \underline{a}\right), \max\left(\underline{b} / \underline{a}, \overline{b} / \overline{a}\right)\right], \left\{\boldsymbol{a} \ni 0\right\} \tag{37}$$

Как было указано выше, про знак $\boldsymbol{x}$ может не быть никакой информации, в таком случае, при знакопостоянстве $\boldsymbol{a}$ потребуется решить 3 уравнения и проверить соответствия условия для $\boldsymbol{x}$ с его результирующим значением [4].

4. Модификация метода для работы с ИСЛАУ

В отличие от уравнения, в ИСЛАУ значение каждого интервала вектора {**B**} складывается из нескольких пар множителей:

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j \tag{38}$$

С одной стороны, это значит, что формулы (21–26) всё ещё актуальны для каждого отдельно взятого слагаемого, но с другой получается, что для вычисления каждого b_i может быть использовано несколько x_j, что делает невозможным проведение проверки (36) через границы $\boldsymbol{b}$, как это делается в (37).

Это приводит к необходимости решения СЛАУ вида:

$$\left[A'\right] \cdot \left\{X'\right\} = \left\{B'\right\} \tag{39}$$

где матрица [A'] будет иметь размер $(2n)^2$ и должна быть невырожденной; векторы {X'} и {B'} — размер $2n$.

Для записи такой СЛАУ в матричном виде можно записать по очереди все границы интервальных векторов {**X**} и {**B**} таким образом, чтобы сначала шли парой нижняя и верхняя границы одного элемента, потом следующего и тд. Тогда интервальную матрицу [**A**] можно будет записать в матрицу [A'] по блокам, то есть каждый элемент [**A**] будет соответствовать блоку размером 2^2. Блоки можно составить на основе формул (21–26) следующим образом:

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{a_{ij}} & 0 \\ 0 & \overline{a_{ij}} \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{x}_j > 0, \boldsymbol{a}_{ij} > 0\right\} \tag{40}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{a_{ij}} & 0 \\ 0 & \underline{a_{ij}} \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{x}_j \left\langle 0, \boldsymbol{a}_{ij} \right\rangle 0\right\} \tag{41}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{a_{ij}} & 0 \\ 0 & \overline{a_{ij}} \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{x}_j \ni 0, \boldsymbol{a}_{ij} > 0\right\} \tag{42}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{a_{ij}} \\ \overline{a_{ij}} & 0 \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{x}_j > 0, \boldsymbol{a}_{ij} < 0\right\} \tag{43}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{a_{ij}} \\ \underline{a_{ij}} & 0 \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{x}_j < 0, \boldsymbol{a}_{ij} < 0\right\} \tag{44}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{a_{ij}} \\ \underline{a_{ij}} & 0 \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{x}_j \ni 0, \boldsymbol{a}_{ij} < 0\right\} \tag{45}$$

Можно отметить наличие частного случая — наличие одного и того же знака у всех $\boldsymbol{a}_{ij}$ позволяет разделить ИСЛАУ на 2 СЛАУ — одну для нижних границ, а другую — для верхних [4], что было использовано в примере 2. К сожалению, в связи с тем, что для вычисления каждого $\boldsymbol{b}_i$ может быть использовано несколько $\boldsymbol{x}_j$, с (37) сделать так же не получится. Тем не менее всё ещё можно составить 4 блока, только один из которых позволит получить верное решение. Таким образом каждый случай $\boldsymbol{a}_{ij} \ni 0$ увеличивает количество вычислений в 4 раза. Не обязательно выполнять все вычисления, поскольку чаще всего подходящим является один из блоков (46, 49), который подставляет в ненулевые ячейки наибольшую по модулю границу.

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{a_{ij}} & 0 \\ 0 & \overline{a_{ij}} \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{a}_{ij} \ni 0\right\} \tag{46}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{a_{ij}} & \overline{a_{ij}} \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{a}_{ij} \ni 0\right\} \tag{47}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{a_{ij}} & \underline{a_{ij}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{a}_{ij} \ni 0\right\} \tag{48}$$

$$a'_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{a_{ij}} \\ \underline{a_{ij}} & 0 \end{bmatrix}, \left\{\boldsymbol{a}_{ij} \ni 0\right\} \tag{49}$$

Осталось проверить этот метод на примере. Попробуем решить популярную интервальную линейную систему [5].

Пример 4.

$$\begin{bmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{bmatrix} \cdot \left\{\boldsymbol{X}\right\} = \begin{Bmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{Bmatrix} \tag{50}$$

Возьмём ε = 0.01. Поскольку знаки $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ неизвестны, а также присутствуют два $\boldsymbol{a}_{ij} \ni 0$, в худшем случае, необходимо решить $3^n \cdot 4^2 = 144$ СЛАУ. Предположим, что оба интервала содержат 0, а для случаев $\boldsymbol{a}_{12} \ni 0$ и $\boldsymbol{a}_{21} \ni 0$ подставим блоки, соответствующие (49) и (46), поскольку наибольшие модули у границ -2 и 2, соответственно.

Пусть $\mathbf{x}_1 \ni 0$ и $\mathbf{x}_2 \ni 0$, тогда, используя (42, 45, 46, 49), можно составить СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \{X'\} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{51}$$

Решением этой СЛАУ будет $\{X'\} = (-0.334, 0.334, -0.334, 0.334)^T$. Это решение подходит по знакам, теперь проверим выполнение (15).

$$\begin{bmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} [-0.334, 0.334] \\ [-0.334, 0.334] \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} [-2.004, 2.004] \\ [-2.004, 2.004] \end{Bmatrix} \tag{52}$$

Как видно, $[\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{X}\} \supseteq \{\mathbf{B}\}$. Теперь добавим $\{\mathbf{E}\}$:

$$\begin{Bmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} [-0.01, 0.01] \\ [-0.01, 0.01] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [-2.01, 2.01] \\ [-2.01, 2.01] \end{Bmatrix} \tag{53}$$

Таким образом $\{\mathbf{B}\} + \{\mathbf{E}\} \supseteq [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{X}\}$.

Нам повезло, что решение было найдено с 1 попытки из 144. Но не стоит пугаться, поскольку на практике, например, в математической физике, {**X**} может обозначать такую величину, которая не может быть отрицательной, а [**A**] редко содержит элементы с разными знаками границ, этого достаточно для решения одной СЛАУ, вместо экспоненциального количества.

5. Сферы применения строгого множества решений

Введение строгого множества решений мотивировано не только теоретическим интересом, но и потребностями прикладных задач, где классические теоретико-множественные определения оказываются недостаточными. Ключевые преимущества подхода, гарантированное выполнение условий для всех возможных реализаций параметров и возможность прямой алгоритмической проверки, делают его незаменимым в следующих областях.

В инженерном проектировании параметры материалов, нагрузок или геометрии часто известны лишь в некоторых пределах (интервалах). Задача устойчивого проектирования состоит в нахождении таких диапазонов управляемых параметров системы, при которых её характеристики гарантированно остаются в заданных допустимых пределах при любых вариациях неконтролируемых факторов.

Строгое множество решений {**X**} является именно таким диапазоном. Если [**A**] — интервальная матрица влияния, а {**B**} — допустимый интервал выходных характеристик, то любой конкретный вектор {X} ∈ {**X**} гарантированно приведёт систему в состояние {B} ∈ {**B**} для некоторой комбинации параметров [A] ∈ [**A**]. Это позволяет формально обосновать безопасность и надёжность конструкции.

Интервальные обратные задачи — это один из наиболее важных и естественных контекстов для применения строгого решения. В обратных задачах по наблюдаемым следствиям {**B**} и известной модели взаимосвязи [**A**] требуется определить такой интервальный вектор входных параметров или воздействий {**X**}, который точно и гарантированно объясняет все возможные наблюдения.

Строгое множество решений даёт полное описание всех таких интервальных входов. Например, в геофизике это может быть определение диапазона возможных глубин залегания пласта по интервальным данным сейсмического зондирования [6]. В медицине — оценка интервала концентраций вещества в ткани по результатам томографии с погрешностью [7].

В компьютерных науках, особенно в областях, связанных с безопасностью и надёжностью, существует острая потребность в формальном доказательстве корректности работы систем при всех возможных входах и состояниях. Условия инвариантности или безопасности гибридной системы часто могут быть записаны в виде линейных ограничений с неопределёнными параметрами [**A**]. Доказательство того, что множество достижимых состояний {**X**} удовлетворяет условию безопасности {**B**}, сводится к проверке отношения (15). Такую проверку можно полностью автоматизировать с использованием библиотек гарантированных интервальных вычислений, что критически важно для сертификации критического ПО.

Таким образом, строгое множество решений занимает уникальную нишу, заполняя пробел между чисто теоретическим анализом и потребностями практического инженерного и компьютерного проектирования, где на первом месте стоят гарантии и верифицируемость. Оно смещает фокус с вопроса «что возможно?» на вопрос «что можно гарантировать?», предлагая методологию для нахождения безопасных рабочих диапазонов параметров в условиях неизбежной параметрической неопределённости.

Заключение

В данной работе представлена новая концепция решения интервальных систем линейных алгебраических уравнений — строгое множество решений. В отличие от классических теоретико-множественных подходов, объединённого, допустимого и контрольного, предлагаемое определение имеет ярко выраженную алгебраическую и вычислительно ориентированную природу. Оно формулируется как множество интервальных векторов $\{\mathbf{X}\}$, для которых результат стандартного интервального умножения $[\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{X}\}$ находится в отношении поглощения $(\{\mathbf{B}\} \supseteq [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{X}\})$ с заданной правой частью $\{\mathbf{B}\}$ при учёте гарантированных границ машинной погрешности.

Для этого было введено и формально определено строгое множество решений, адаптированное для практической верификации на ЭВМ. Ключевым условием выбрано отношение поглощения, а не точное равенство, что позволяет корректно работать в условиях конечной точности вычислений.

Разработан и продемонстрирован на модельном примере метод нахождения $\{\mathbf{X}\}$. Он основан на предположении о работе функций «min» и «max». Также был продемонстрирован метод проверки принадлежности полученного решения строгому множеству решений с учётом машинной погрешности и направленного округления.

Выявлены и систематизированы ключевые сферы практического применения нового подхода. Его уникальные преимущества — гарантированность выполнения условий для всех реализаций параметров и алгебраическая проверяемость — делают его особенно востребованным для устойчивого проектирования технических систем, решения интервальных обратных задач и формальной верификации алгоритмов и критических систем.

Таким образом, концепция строгого множества решений заполняет важный пробел между абстрактной теорией интервальных уравнений и потребностями прикладных задач, требующих гарантированных результатов и алгоритмической проверяемости. В отличие от известных «формальных» или «алгебраических» решений, данная концепция изначально учитывает вычислительный контекст.

Перспективы дальнейших исследований видятся в развитии эффективных алгоритмов не только для проверки, но и для прямого нахождения или аппроксимации строгого множества решений для широких классов интервальных матриц, анализе его топологических свойств и связи с другими типами решений, а также в более детальной адаптации метода к конкретным прикладным областям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore R.E. Interval analysis. Prentice Hall, 1966. — 145 p.
2. Шарый С.П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений // Журнал «Вычислительные технологии». 2002. — Т. 7, № 6. — С. 90–113.
3. Стандарт IEEE для интервальной арифметики [Электронный ресурс]. URL: https://standards.ieee.org/ieee/1788/4431/ (дата обращения 01.02.2026);
4. Качанов Ф.К. Обратимость интервального матрично-векторного умножения / Ф.К. Качанов // Сборник трудов XIV международной научной конференции «ИТ — Стандарт 2025», Москва, 10-11 декабря 2025 года. — Москва: МИРЭА — Российский Технологический Университет, 2025. — С. 306–313.
5. Шарый С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределённостью // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 51–61.
6. Virieux J. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics / Virieux J., Operto S // Geophysics. — 2009. — №6. — P. 127–152.
7. Bertero M., Boccacci P. Introduction to Inverse Problems in Imaging / Bertero M., Boccacci P. — Bristol: Institute of Physics Publishing, 1998. — p. 352.