

# УЧЕТ СИЛЫ ИНЕРЦИИ КОРИОЛИСА ПРИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ БАЛОЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ТИМОШЕНКО<sup>1</sup>

## CORIOLIS FORCES OF INERTIA IN FINITE ELEMENT MODELING WITH TIMOSHENKO BEAM ELEMENTS

**M. Barulina  
V. Pankratov**

*Summary.* Analytical expressions of component of the Coriolis matrix of finite element as three-dimensional Timoshenko beam were found fully taking into account the Timoshenko theory. The use of such element allows to carry out the numerical simulation of different types of sensors and there components taking into account both the Timoshenko theory and the Coriolis inertia forces.

*Keywords:* finite element modeling, Timoshenko theory, the force of inertia, Timoshenko beam.

**Барулина Марина Александровна**

К.т.н., с.н.с., Институт проблем точной механики  
и управления РАН, г. Саратов  
marina@barulina.ru

**Панкратов Владимир Михайлович**

Д.т.н., профессор, Институт проблем точной  
механики и управления РАН, г. Саратов  
vmpank@mail.ru

*Аннотация.* В работе найдены аналитические соотношения для компонент матрицы Кориолиса полностью учитывающего теорию изгиба Тимошенко трехмерного балочного конечного элемента. Использование такого элемента позволяет проводить численное моделирование, например, компонентов микромеханических датчиков инерциальной информации, с учетом возникающих при их эксплуатации сил инерции.

*Ключевые слова:* конечно-элементное моделирование, теория Тимошенко, сила инерции, балка Тимошенко.

## Введение

С развитием науки и техники возросли требования к точности моделирования различных процессов, проходящих в различных приборах, датчиках и их компонентах при различных условиях эксплуатации. Более того принцип действия некоторых типов датчиков, например микромеханических гироскопов, основан на возникновении сил Кориолиса и на возбуждении вынужденных колебаний на частотах, близких к резонансным [1]. Поэтому при численном моделировании таких датчиков важно, во-первых, учитывать влияние на их динамику сил инерции Кориолиса и, во-вторых, использовать конечные элементы, в полной мере реализующие неклассическую теорию изгиба Тимошенко, которая, в отличие от теории Эйлера-Бернулли, может использоваться для балок, совершающих колебания на частотах, близких к резонансным [2].

## Постановка задачи

Для построения матрицы Кориолиса рассмотрим балочный конечный элемент (КЭ) постоянного поперечного сечения и длины  $L$  (рис. 1). Определим два узла — в центре левого и правого торца соответственно.

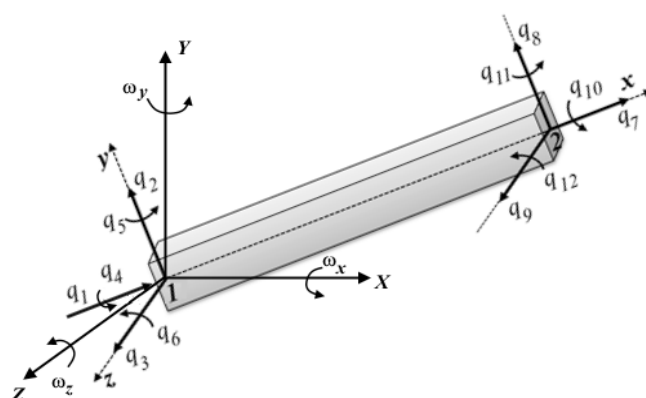


Рис. 1. Трехмерный элемент и узловые перемещения

Введем локальную систему координат  $(xyz)$ , начало которой поместим в первом узле. Ось  $x$  направим по оси КЭ, оси  $y$  и  $z$  — по главным осям инерции поперечного сечения. КЭ будет иметь 12 степеней свободы —  $q_1, q_7$  — продольное перемещение 1 и 2 узла вдоль оси  $x$ ;  $q_2, q_8$  и  $q_3, q_9$  — поперечное перемещение узлов в направлении оси  $y$  и  $z$  соответственно;  $q_4, q_{10}$  — углы кручения вокруг оси  $x$ ;  $q_5, q_{11}$  и  $q_6, q_{12}$  — углы изгиба в плоскости  $(xz)$  и  $(xy)$  соответственно (рис. 1). Также введем в рас-

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 16–19–10290

смотрение инерциальную систему координат  $(XYZ)$ , в которой с угловой скоростью

$$\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$$

вращается КЭ.

Уравнение движения, учитывающее вращение КЭ, записанное в подвижной системе координат  $(xyz)$  известно и имеет вид [3,4]:

$$M^{(e)}\ddot{q} + C^{(e)}\dot{q} + (K^{(e)} - S^{(e)})q = F^{(e)} \quad (1)$$

где  $M^{(e)}$  — матрица масс КЭ;  $C^{(e)}$  — матрица Кориолиса, отражающая влияние гироскопических сил (матрица Кориолиса);  $K^{(e)}$  — матрица жесткости;  $S^{(e)}$  — центробежная матрица, выражающая влияние центробежных сил на динамику КЭ;  $q$  — вектор узловых перемещений КЭ.

### Построение матрицы Кориолиса

Для построения матрицы Кориолиса рассмотрим КЭ как механическую систему, состоящую из деформируемого твердого тела, находящегося под воздействием внешней нагрузки и гироскопических сил. Тогда, принимая узловые перемещения конечного элемента за обобщенные координаты и не учитывая демпфирование, уравнения Лагранжа 2го рода для КЭ запишутся в виде [5]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (2)$$

где  $Q_i$  — обобщенные силы,  $N = 12$  — число степеней свободы КЭ,  $\mathcal{L} = T - \Pi$  — лагранжиан,  $T$  и  $\Pi$  — кинетическая и потенциальная энергии соответственно.

Известно [3], что потенциальную энергию  $\Pi$  системы без демпфирования, можно представить в виде квадратичной формы по обобщенным координатам:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \kappa_{i,j} q_i q_j \quad (3)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы во вращающейся системе координат записывается в виде интеграла по объему  $V$  балки [6]:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V \left[ (\dot{U}_x^*)^2 + (\dot{U}_y^*)^2 + (\dot{U}_z^*)^2 \right] dV \quad (5)$$

Кинетическую энергию (8) также можно представить в виде разложения по обобщенным скоростям и координатам, как было показано в [7]:

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N m_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad T^{(1)} = \sum_{i,j=1}^N \tilde{c}_{i,j} \dot{q}_i q_j;$$

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N s_{i,j} q_i q_j \quad (6)$$

Тогда, в соответствии с (3) и (5) с учетом выражения (2), получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^N m_{i,j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N (\tilde{c}_{i,j} - \tilde{c}_{j,i}) \dot{q}_j + \sum_{j=1}^N (\kappa_{i,j} - s_{i,j}) q_j = Q_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (7)$$

Записывая систему уравнений (7) в матричном виде и сравнивая с матричным уравнением (1), получаем, что компоненты матриц  $M^{(e)}$ ,  $C^{(e)}$ ,  $K^{(e)}$ ,  $S^{(e)}$  находятся приведением соответствующих выражений для кинетической и потенциальной энергий к разложению по узловым перемещениям и/или скоростям.

Так, для определения компонентов матрицы Кориолиса  $C^{(e)}$ , необходимо привести вид  $T^{(1)}$  к виду (6), и вычислить её компоненты по формуле:

$$c_{ij} = \tilde{c}_{ij} - \tilde{c}_{ji} \quad (8)$$

где  $c_{ij}$  — будут компонентами матрицы Кориолиса,  $\tilde{c}_{ij}$  — коэффициенты в разложении  $T^{(1)}$  по узловым координатам и скоростям.

Отметим, что матрица Кориолиса  $C^{(e)}$  будет кососимметрической, так как ее компоненты определяются в соответствии с (8).

Матрица Кориолиса будет иметь следующий вид (стр. 15), где компоненты определяются следующими соотношениями:

$$\hat{c}_{1,2} = \hat{c}_{7,8} = -\frac{\omega_z (\mu_z + 20)}{30};$$

$$\hat{c}_{1,3} = \hat{c}_{7,9} = -\frac{\omega_y (\mu_y + 20)}{30};$$

$$\hat{c}_{1,5} = -\hat{c}_{7,11} = -\frac{L\omega_y (\mu_y + 5)}{60};$$

$$\hat{c}_{1,6} = -\hat{c}_{7,12} = -\frac{L\omega_z (\mu_z + 5)}{60};$$

$$C^{(e)} = \rho LA \begin{bmatrix} 0 & \hat{c}_{1,2} & -\hat{c}_{1,3} & 0 & \hat{c}_{1,5} & \hat{c}_{1,6} & 0 & \hat{c}_{1,8} & \hat{c}_{1,9} & 0 & \hat{c}_{1,11} & \hat{c}_{1,12} \\ -\hat{c}_{1,2} & 0 & -\hat{c}_{2,3} & \hat{c}_{2,4} & \hat{c}_{2,5} & 0 & \hat{c}_{2,7} & 0 & \hat{c}_{2,9} & \hat{c}_{2,10} & \hat{c}_{2,11} & 0 \\ -\hat{c}_{1,3} & -\hat{c}_{2,3} & 0 & \hat{c}_{3,4} & 0 & \hat{c}_{3,6} & \hat{c}_{3,7} & \hat{c}_{3,8} & 0 & \hat{c}_{3,10} & 0 & \hat{c}_{3,12} \\ 0 & -\hat{c}_{2,4} & -\hat{c}_{3,4} & 0 & \hat{c}_{4,5} & \hat{c}_{4,6} & 0 & \hat{c}_{4,8} & \hat{c}_{4,9} & 0 & \hat{c}_{4,11} & \hat{c}_{4,12} \\ -\hat{c}_{1,5} & -\hat{c}_{2,5} & 0 & -\hat{c}_{4,5} & 0 & \hat{c}_{5,6} & \hat{c}_{5,7} & \hat{c}_{5,8} & 0 & \hat{c}_{5,10} & 0 & \hat{c}_{5,12} \\ -\hat{c}_{1,6} & 0 & -\hat{c}_{3,6} & -\hat{c}_{4,6} & -\hat{c}_{5,6} & 0 & \hat{c}_{6,7} & 0 & \hat{c}_{6,9} & \hat{c}_{6,10} & \hat{c}_{6,11} & 0 \\ 0 & -\hat{c}_{2,7} & -\hat{c}_{3,7} & 0 & -\hat{c}_{5,7} & -\hat{c}_{6,7} & 0 & \hat{c}_{7,8} & \hat{c}_{7,9} & \hat{c}_{7,10} & \hat{c}_{7,11} & \hat{c}_{7,12} \\ -\hat{c}_{1,8} & 0 & -\hat{c}_{3,8} & -\hat{c}_{4,8} & -\hat{c}_{5,8} & 0 & -\hat{c}_{7,8} & 0 & \hat{c}_{8,9} & \hat{c}_{8,10} & \hat{c}_{8,11} & 0 \\ -\hat{c}_{1,9} & -\hat{c}_{2,9} & 0 & -\hat{c}_{4,9} & 0 & -\hat{c}_{6,9} & -\hat{c}_{7,9} & -\hat{c}_{8,9} & 0 & \hat{c}_{9,10} & 0 & \hat{c}_{9,12} \\ 0 & -\hat{c}_{2,10} & -\hat{c}_{3,10} & 0 & -\hat{c}_{5,10} & -\hat{c}_{6,10} & -\hat{c}_{7,10} & -\hat{c}_{8,10} & -\hat{c}_{9,10} & 0 & \hat{c}_{10,11} & \hat{c}_{10,12} \\ -\hat{c}_{1,11} & -\hat{c}_{2,11} & 0 & -\hat{c}_{4,11} & 0 & -\hat{c}_{6,11} & -\hat{c}_{7,11} & -\hat{c}_{8,11} & 0 & -\hat{c}_{10,11} & 0 & \hat{c}_{11,12} \\ -\hat{c}_{1,12} & 0 & -\hat{c}_{3,12} & -\hat{c}_{4,12} & -\hat{c}_{5,12} & 0 & -\hat{c}_{7,12} & 0 & -\hat{c}_{9,12} & -\hat{c}_{10,12} & -\hat{c}_{11,12} & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица Кориолиса

$$\hat{c}_{1,8} = -\hat{c}_{2,7} = \frac{\omega_z(\mu_z - 10)}{30}; \quad \hat{c}_{1,9} = -\hat{c}_{3,7} = -\frac{\omega_y(\mu_y - 10)}{30};$$

$$\hat{c}_{1,11} = \hat{c}_{5,7} = -\frac{L\omega_y(\mu_y - 5)}{60}; \quad \hat{c}_{1,12} = \hat{c}_{6,7} = -\frac{L\omega_z(\mu_z - 5)}{60};$$

$$\hat{c}_{2,3} = \hat{c}_{8,9} = -\frac{\omega_x(7\mu_z + 7\mu_y + 2\mu_y\mu_z + 140)}{210}; \quad \hat{c}_{2,4} = \hat{c}_{2,10} = \hat{c}_{4,8} = -\hat{c}_{8,10} = \frac{p_z^2\omega_y\mu_z}{L};$$

$$\hat{c}_{3,4} = \hat{c}_{3,10} = \hat{c}_{4,9} = -\hat{c}_{9,10} = \frac{p_y^2\omega_z\mu_y}{L}; \quad \hat{c}_{2,5} = -\hat{c}_{8,11} = \frac{L\omega_x(7\mu_y + 2\mu_y\mu_z + 35)}{420};$$

$$\hat{c}_{2,9} = -\hat{c}_{3,8} = \frac{\omega_x(7\mu_y + 7\mu_z + 2\mu_y\mu_z - 70)}{210}; \quad \hat{c}_{2,11} = \hat{c}_{5,8} = \frac{L\omega_x(7\mu_y + 2\mu_y\mu_z - 35)}{420};$$

$$\hat{c}_{3,6} = -\hat{c}_{9,12} = \frac{L\omega_x(7\mu_z + 2\mu_y\mu_z + 35)}{420}; \quad \hat{c}_{4,6} = \hat{c}_{10,12} = -\frac{p_z^2\omega_y(3\mu_z - 4)}{6};$$

$$\hat{c}_{4,11} = -\hat{c}_{5,10} = \frac{p_y^2\omega_z(3\mu_y - 2)}{6}; \quad \hat{c}_{3,12} = \hat{c}_{6,9} = \frac{L\omega_x(7\mu_z + 2\mu_y\mu_z - 35)}{420};$$

$$\hat{c}_{4,5} = \hat{c}_{10,11} = \frac{p_y^2\omega_z(3\mu_y - 4)}{6}; \quad \hat{c}_{4,12} = -\hat{c}_{6,10} = -\frac{p_z^2\omega_y(3\mu_z - 2)}{6};$$

$$\hat{c}_{5,6} = \hat{c}_{11,12} = -\frac{L^2\omega_x(\mu_z\mu_y + 7)}{420}; \quad \hat{c}_{5,12} = -\hat{c}_{6,11} = -\frac{L^2\omega_x(\mu_z\mu_y - 7)}{420};$$

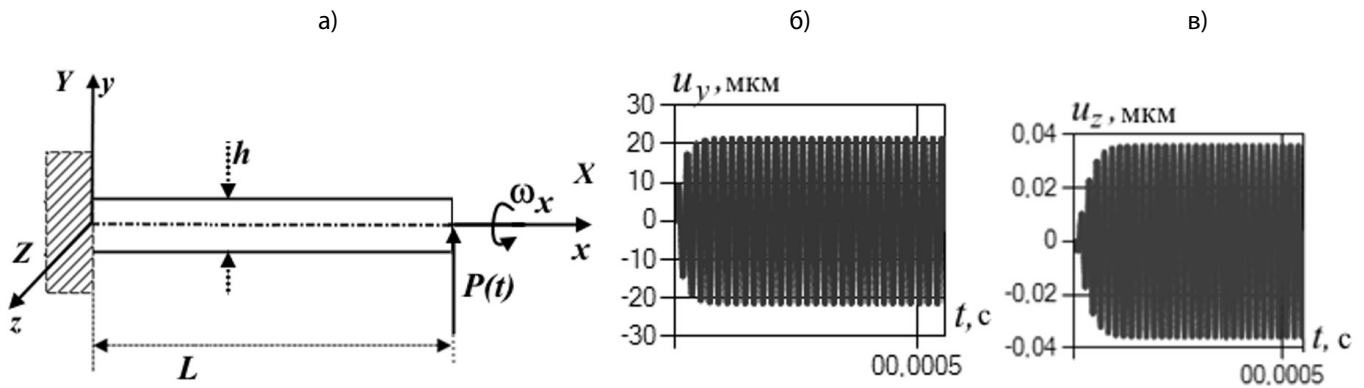


Рис. 2. Схема простейшего вибрационного гироскопа (а); первичные колебания (б) и вторичные колебания (в) при  $\omega_x = 100$  рад/с

где  $p_y^2 = I_y/A$ ,  $p_z^2 = I_z/A$  — квадраты радиусов инерции поперечного сечения;

$$\xi = x/L; \mu_z = 1/(1 + Y_z); \mu_y = 1/(1 + Y_y);$$

$$Y_z = 12EI_z/kAGL^2; Y_y = 12EI_y/kAGL^2;$$

$E$  — модуль Юнга;  $G$  — модуль сдвига;  $A$  — площадь поперечного сечения;  $k$  — коэффициент сдвига, вводимый в теории Тимошенко и учитывающий нелинейность распределения нормальных продольных и поперечных напряжений в поперечном сечении;  $I_z, I_y$  — осевые моменты инерции поперечного сечения;  $L$  — длина элемента.

### Моделирование

Проверка полученных выражений для компонент матрицы Кориолиса была проведена с помощью специализированного программного обеспечения [9] и сравнением результатов с данными, полученными при расчете в программе ANSYS.

Рассматривался простейший вибрационный гироскоп, моделью которого может служить консольная балка (рис. 2а) постоянного квадратного сечения с параметрами [8]  $E = 190$  ГПа,  $\nu = 0.226$ ,  $L = 164$  мкм,  $h = 1$  мкм.

Первая собственная частота такой балки составит 54913 Гц, согласно расчетам, проведенным как с помощью разработанного математического и программного аппарата, так и в ANSYS.

К незакрепленному торцу балки приложена сила  $P(t)$  в направлении оси  $y$ , изменяющаяся по гармоническому закону с амплитудой  $A_p = 80$  нН и частотой вынужденных колебаний, равной первой собственной частоте:  $f_p = 54914$  Гц. Предположим, что рассматриваемый гироскоп вращается с переносной угловой скоростью

$\omega_x = 100$  рад/с. Демпфирование задавалось путем ввода в уравнение (1) матрицы демпфирования, представляющей собой линейную комбинацию матрицы масс и матрицы жесткости, при этом коэффициенты этой комбинации подбирались так, чтобы амплитуда первичных колебаний составляла 20 мкм

Коэффициент сдвига при численных расчетах вычислялся по формуле [2]:

$$k = \frac{3}{2} - \frac{3}{10(1+\nu)} - \frac{3\nu}{4(1+\nu)}$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

На рис. 2б, в приведены результаты моделирования с шагом  $2 \cdot 10^{-7}$  с с помощью специализированного программного обеспечения [10]. На рис. 2б показаны возникающие под действием вынуждающей силы  $P(t)$  колебания в плоскости  $(xy)$ . На рис. 2в приведен график колебаний, возникающий в плоскости  $(zx)$  при наличии угловой скорости вращения  $\omega_x = 100$  рад/с.

Максимальное значение прогиба  $u_y$  в плоскости  $(xy)$  составило 21.339 мкм, максимальное значение прогиба  $u_z$  в плоскости  $(xz)$  равно 0.0357 мкм.

Соответствующие значения, полученные при гармоническом анализе в ANSYS с аналогичными параметрами, равны 20.898 мкм и 0.0339 мкм. Таким образом, отличие значений, полученных с помощью разработанного в данной работе математической модели и специализированного программного обеспечения [9], и значений, полученных в результате моделирования в ANSYS, составляет менее 5%, что позволяет говорить о правильности полученных соотношений для матрицы Кориолиса.

## Заключение

Разработанная матрица Кориолиса, совместно с разработанными в работе [7], представляет собой основу математической модели на основе теории Тимошенко трехмерного конечного элемента с двенадцатью степенями свободы. Этот элемент может быть использован для решения широкого круга задач статики и динамики, в том числе и при воз-

никающем гироскопическом эффекте, например, в области разработки и исследования микромеханических датчиков инерциальной информации и создания специализированных программных комплексов, обеспечивающих, в отличие от универсальных программных комплексов с закрытым программным кодом типа ANSYS, прозрачность реализации алгоритмов, полный контроль над ходом вычислений и существенно более низкую стоимость.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Распопов В. Я. Микромеханические приборы. — Машиностроение, 2007. 400с.
2. Григолюк, Э. И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов // Итоги науки и техники. Сер.: Мех. тверд. деформ. тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. 272 с.
3. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. — М.: Высш.шк., 1985. 392 с., ил.
4. Барулина М. А. Построение матрицы масс трехмерного конечного элемента для моделирования динамики микромеханических датчиков инерциальной информации и их узлов // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2015. Т. 16, № 5. С. 352–360.
5. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 448с.
6. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 824 с.
7. Барулина М. А. Математическое обеспечение конечно-элементного моделирования микромеханических датчиков инерциальной информации в рамках неклассической теории изгиба // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. № 11. С. 764–770
8. Джашитов В.Э., Панкратов В. М., Барулина М. А. Теоретические основы разработки и создания суперминиатюрного микромеханического многофункционального датчика инерциальной информации // Нано- и микросистемная техника. 2010. № 5(118). С. 46–54.
9. Барулина М.А., Панкратов В. М. Специализированное алгоритмическое и программное обеспечение для моделирования динамических процессов в микромеханических датчиках инерциальной информации//Проблемы управления, обработки и передачи информации. Сборник трудов IV Международной научной конференции: в 2 томах. Саратов. 2015. С 37–45.

© Барулина Марина Александровна ( marina@barulina.ru ), Панкратов Владимир Михайлович ( vmpank@mail.ru ).

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»

