DOI 10.37882/2223-2966.2024.04.12

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СИСТЕМ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

STATISTICAL EVALUATION OF LEONTIEF-TYPE SYSTEMS

M. Ermilov
L. Surkova
S. Bityutsky
L. Kudryavtseva
A. Shurupov

Summary. Improving mathematical models of economic objects remains relevant. The paper proposes a solution to the Leontief-type inverse problem — obtaining a statistically consistent estimate of the technological matrix based on the assumption that the production and demand vectors in the Leontief model are known with some accuracy. It is shown that, within the framework of traditional assumptions regarding the statistical properties of direct measurement errors, this estimate of the technological matrix turns out to be unbiased. The covariance properties of the obtained estimates are calculated.

Keywords: statistical estimation; matrix, vectors; unbiased matrix estimates; covariance properties of matrix estimates.

Ермилов Михаил Михайлович
Старший преподаватель,
Российский университет кооперации, г. Мытищи Россия
mermilov@ruc.su
Суркова Людмила Евгеньевна
кандидат технических наук, доцент, Национальный Исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва
LSurkova2004@yandex.ru
Битюцкий Сергей Яковлевич
кандидат технических наук, доцент,
Российский университет кооперации, г. Мытищи Россия
s.ya.bitjuckij@ruc.su
Кудрявцева Людмила Георгиевна
кандидат технических наук, доцент,
Российский университет кооперации, г. Мытищи Россия
l.kud@mail.ru
Шурупов Анатолий Александрович
кандидат технических наук, доцент,
Российский университет кооперации, г. Мытищи Россия
ashurupov@ruc.su

Аннотация. Совершенствование математических моделей экономических объектов остается актуальным. В работе предложено решение обратной задачи леонтьевского типа — получение статистически состоятельной оценки технологической матрицы на основе предположения известности с некоторой точностью векторов производства и спроса в модели Леонтьева. Показано, что в рамках традиционных предположений относительно статистических свойств погрешностей непосредственных измерений, данная оценка технологической матрицы оказывается несмещённой. Вычислены ковариационные свойства полученных оценок.

Ключевые слова: статистическое оценивание; матрица, векторы; несмещённые оценки матрицы; ковариационные свойства матричных оценок.

Введение

Цифровизация экономики, совершенствование технического и программного обеспечения, накопленные объемы информации и возможности их аналитической обработки сопровождаются также развитием математического обеспечения информационных систем, являющейся неотъемлемой их частью. Математические модели экономических систем, реализованные в автоматизированных информационных системах и прикладных программах, позволяют решать широкий класс задач, как аналитического характера, так и задач управления, например, анализ, планирование, прогнозирование. Процесс разработки математической модели и исследование системы на ее основе является составляющей системного анализа [1].

В современной экономике одной из ключевых задач является анализ межотраслевых взаимосвязей и определение эффективности производства. Для решения задач такого типа широко используются леонтьевские модели [2, 3], которые позволяют описать как взаимодействие различных отраслей экономики, так и взаимодействие внутри одной отрасли или предприятия. Модели Леонтьева, как правило, описывают взаимосвязи между различными секторами экономики, включая производство, потребление и инвестиции, и позволяют анализировать влияние различных факторов, как экономических, так и технологических.

Одной из задач в моделях леонтьевского типа выступает задача определения технологической матрицы на основе известных векторов производства и спроса.

Технологическая матрица представляет собой матрицу коэффициентов, описывающих отношение между потреблением и выпуском товаров, и может быть использована, например, для оценки ряда показателей:

- Определения степени взаимозависимости отраслей экономики
- Анализа структуры экономической системы и её устойчивости
- Оценки эффективности использования ресурсов и производства
- Прогнозирования изменений в экономике в связи с изменениями в производстве и спросе
- Определения возможностей для развития отдельных отраслей и стратегии государственного регулирования

Таким образом, задача моделирования и получение статистически состоятельной оценки технологической матрицы в экономических моделях леонтьевского типа важна и имеет практическое значение для анализа структуры экономического объекта, определения эффективности производства в различных отраслях экономики.

Целью данной статьи является получение статистически состоятельной оценки технологической матрицы, т.е. решение обратной задачи: предполагая, что с некоторой точностью известны векторы производства и спроса в модели Леонтьева, требуется получить статистически состоятельную оценку технологической матрицы. Объектом исследования является экономическая система, предметом исследования — методы и модели для оценки технологической матрицы.

Актуальность данного исследования заключается в том, что точность оценки технологической матрицы является ключевым фактором для принятия решений в экономической сфере. Например, на основе такой оценки можно определить эффективность использования ресурсов, разработать стратегию государственного регулирования и прогнозировать изменения в экономике.

Материалы и методы

Задачи подобного типа, касающиеся оценки технологической матрицы при известных векторах производства и спроса рассмотрены в различных работах [2, 4–5]. В работе [2] рассматривается метод оценки технологической матрицы на основе леонтьевских моделей, а также примеры применения данного метода в различных экономических задачах. Работа [4] посвящена оценке матрицы коэффициентов импортных капитальных затрат в рамках динамической модели «затраты-выпуск» для экономики Республики Беларусь по данным за 2016–2020 гг. В работе [5] представлена обобщенная модель Леонтьева на случай ограничений на интенсивность производства и нечеткости исходных данных. В работе описывается модель Леонтьева с интервальной производственной матрицей. Методы наименьших квадратов и максимального правдоподобия позволяют получить статистически состоятельную оценку технологической матрицы, основанную на известных векторах производства и спроса. В данной работе использовались матричные методы.

Результаты

Классическое уравнение Леонтьева описывает обобщённый процесс производства некоторого ассортимента n видов товаров. Количество единиц товара того или иного вида входит в этой модели как один из элементов n-мерного вектора $\mathbf{x}$. Его можно назвать вектором производства. Предполагается, что некоторая часть производимых товаров из этого вектора затрачивается как непосредственно для производства, так и на потребление товаров самими членами предприятия. Возможны и иные, не всегда очевидные расходы. Это может быть связано, например, с технологией производства какой-либо продукции. Наконец, оставшаяся часть товаров поступает на рынок в количествах, описываемых вектором $\mathbf{y}$, который можно назвать вектором спроса. Весь процесс выражается уравнением Леонтьева:

$$\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{1}$$

Здесь матрица A, называемой матрицей прямых затрат, или технологической матрицей, определяет упомянутую уже долю расходов продукции в самом процессе производства.

Прямой задачей принято считать нахождение вектора производства $\mathbf{X}$, если заданы как вектор спроса $\mathbf{y}$, так и матрица A. В данной статье решается обратная задача: предполагая, что с некоторой точностью известны векторы производства и спроса, требуется получить статистически состоятельную оценку технологической матрицы. Предполагается, что произведено N наблюдений векторов $\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \left(k = 1, 2, \ldots, N\right)$, и каждая такая пара удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{x}_k - A\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k + \varepsilon_k \;\left(k = 1, \ldots, N\right) \tag{2}$$

Введём матрицу $\varepsilon = \left(\varepsilon_1 \; \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_N\right)$ из N столбцов, каждый из которых — случайный вектор с нулевым средним значением; они независимы, и, простоты ради, будем считать, что каждый из них имеет одинаковую матрицу ковариаций C.

Аналогично образуются матрицы

$$X = \left(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_N\right); \; Y = \left(\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_N\right)$$

Уравнение (2) принимает матричный вид

$$X - AX = Y + \varepsilon \tag{3}$$

На базе этого уравнения можно сформировать критерий для оценки технологической матрицы A

$$S^2 = tr\left[(AX - X + Y)(X^T A^T - X^T - Y^T)\right] \to \min$$

Здесь знак tr обозначает след матричного выражения.

Оценочному значению будет соответствовать минимум S^2. В точке достижения минимума критерия его виртуальное изменение обращается в нуль: $\delta S^2 = 0$.

$$\delta S^2 = 2 \cdot tr\left[(AX - X + Y)X^T \cdot \delta A\right] = 0,$$

и, в силу произвольности δA:

$$(AX - X + Y)X^T = 0.$$

Отсюда получается оценка значения леонтьевской матрицы A

$$A = I - YX^T\left(XX^T\right)^{-1} \tag{4}$$

где $I_{n\times n}$ — единичная матрица.

Рассмотрим некоторые статистические характеристики полученной оценки. Положим, что в (4):

$$Y = X - A_0 X + \varepsilon$$

Будем иметь

То есть погрешность:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \varepsilon X^T\left(XX^T\right)^{-1}, \\ \Delta A &= A - A_0 = \varepsilon X^T\left(XX^T\right)^{-1} \end{aligned} \tag{5}$$

Во-первых, прямо из (5)

$$\langle \Delta A \rangle = \langle \varepsilon \rangle X^T\left(XX^T\right)^{-1} = 0$$

То есть систематический сдвиг оценки отсутствует.

Во-вторых, рассмотрим, какое отклонение оценки спроса произойдёт в силу случайной погрешности оценки матрицы:

$$\begin{aligned} \Delta Y &= -\Delta A \cdot X = -\varepsilon \cdot D, \\ D &= X^T\left(XX^T\right)^{-1} X \end{aligned} \tag{6}$$

Попутно заметим, что матрица D симметрична и идемпотентна:

$$D^T = D;\ D^2 = D \tag{7}$$

Согласно (6, 7) получаем ковариацию оценки спроса:

$$\mathrm{cov}(\Delta Y) = \langle \Delta Y \Delta Y^T \rangle$$

То есть:

$$\mathrm{cov}(\Delta Y) = \langle \varepsilon D \varepsilon^T \rangle \tag{8}$$

Тут уместно доказать следующее достаточно общее утверждение:

Лемма. Пусть

$$\begin{aligned} &\varepsilon = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_N); \\ &\langle \varepsilon \rangle = 0; \\ &\left\langle \varepsilon_k \varepsilon_l^T \right\rangle = r_{k,l} \cdot C; \\ &R = \left\| r_{k,l} \right\| = \left\| r_{l,k} \right\| = R^T \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда математическое ожидание выражения (8)

$$V = \langle \varepsilon D \varepsilon^T \rangle = tr\left(R^T D\right) \cdot C \tag{10}$$

Доказательство.

Пусть матрица D рассматривается как система столбцов

$$D = (\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2 \ldots \mathbf{d}_N)$$

Запишем величину V более детально, учитывая равенства (9):

$$\begin{aligned} V &= \left\langle (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N) \cdot (\mathbf{d}_1\ \mathbf{d}_2 \ldots \mathbf{d}_N) \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \ldots \\ \varepsilon_1^T \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\langle (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N) \cdot \sum_j \mathbf{d}_j \varepsilon_j^T \right\rangle = d_{i,j} \left\langle \varepsilon_i \varepsilon_j^T \right\rangle = d_{i,j} r_{j,i} C \end{aligned} \tag{11}$$

Ради сокращения записи, в выражениях (11) было использовано хорошо известное в физике правило суммирования по повторяющимся индексам i, j. Заметим, что числовой коэффициент, стоящий теперь перед матрицей C, представляет собой след от произведения матриц D, R. Таким образом, утверждение леммы доказано. Попутно можно заметить, что, судя непосредственно по доказательству, формула (10) также остаётся в силе и для любой квадратной матрицы D.

Заключение

Таким образом, в статье обоснована возможность оптимальной статистической оценки технологической матрицы в моделях леонтьевского типа. При этом в качестве исходных данных в модели рассматриваются наблюдения спроса и предложения. Показано, что в рамках традиционных предположений относительно статистических свойств погрешностей непосредственных измерений, данная оценка технологической матрицы оказывается несмещённой. Это означает, что при использовании статистических методов для оценки технологической матрицы, среднее значение оценок приближается к истинному значению технологической матрицы, и систематических ошибок в оценке не возникает. Таким образом, несмещённая оценка технологической матрицы позволяет получить более точное представление о структуре и взаимосвязях в экономике на основе известных векторов производства и спроса

Кроме того, вычислены ковариационные свойства полученных оценок. Это является важным этапом в статистическом анализе, поскольку позволяет оценить степень уверенности в полученных оценках и провести статистический вывод о параметрах модели или явления. Ковариационные свойства оценок позволяют оценить их точность, доверительные интервалы, а также провести статистические тесты на значимость полученных результатов.

Отметим, что развитый формализм в принципе получать оценки не только стационарных, но и динамических моделей Леонтьева, в которых может учитываться, например, что каждый очередной цикл производства товаров продолжается на протяжении некоторого числа часов, дней, либо других временных единиц. Методика оценивания при этом не вызовет каких-либо принципиальных трудностей, хотя, естественно, сама оценка станет более сложной и информативной. Сложности при этом возникнут в связи с увеличением размерности оцениваемой матрицы.

Практическая значимость данного исследования заключается в возможности применения полученных результатов для анализа экономических процессов и принятия решений в экономической сфере на основе математических методов, которые могут быть реализованы в информационных системах. Таким образом, результаты данного исследования могут быть использованы для разработки информационных систем, предназначенных для анализа экономических процессов и принятия решений в экономической сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вдовин В.М., Суркова Л.Е., Валентинов В.А. Теория систем и системный анализ. Учебник для бакалавров / (5-е изд., стер.) Москва, 2020.
2. Келлер А.В. Системы леонтьевского типа и прикладные задачи. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2022. Т. 15. № 1. С. 23–42.
3. Казей И.С., Ермилов М.М. Математическое моделирование кооперативных систем в терминах статической модели Леонтьева. Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2018. Т. 5. № 1. С. 191–199.
4. Пархименко В.А. Опыт экспериментальной оценки матрицы коэффициентов импортных капитальных затрат в динамической модели Леонтьева для белорусской экономики в 2016–2020 годах. «Проблемы прогнозирования» 2023 №4 (2023): n. pag.
5. Козловская, Я.И., Петров А.Д., Севодин М.А. «Существование равновесия в системах леонтьевского типа с ограничениями и оценка его параметров при нечеткости исходных данных.» Mathematics (2016).

© Ермилов Михаил Михайлович (mermilov@ruc.su); Суркова Людмила Евгеньевна (LSurkova2004@yandex.ru);
Битюцкий Сергей Яковлевич (s.ya.bitjuckij@ruc.su); Кудрявцева Людмила Георгиевна (l.kud@mail.ru); Шурупов Анатолий Александрович (ashurupov@ruc.su)
Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»