

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОДНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

INVESTIGATION OF NUMERICAL METHODS FOR MODELING WAVEGUIDE PROPAGATION

V. Biryukov

Summary. The paper studies numerical methods for solving waveguide problems generated by a system of Maxwell's equations with given boundary conditions. The aim of the work was to develop and compare the finite-difference method and the finite element method modeling the propagation of eigensurface waves in a cylindrical dielectric weakly directional waveguide.

To achieve this goal, we described a mathematical model based on Maxwell's equations, implemented the methods and conducted a computational experiment in the Maple environment, compared the results in terms of accuracy, stability and computational costs, and analyzed the influence of geometry and model parameters.

We assumed that both methods provide comparable accuracy, but differ in stability and computational costs depending on the complexity of the geometry and model parameters.

The obtained values of the eigenfunction of both methods are in good agreement with each other, which is confirmed by the constructed graphs, allowing a visual comparison of the behavior of the solutions. It was found that the finite difference method is effective for simple geometry and requires fewer computational resources, while the finite element method is more versatile and stable when modeling in areas with complex boundaries.

Keywords: waveguides, Maxwell's equation, finite element method, finite difference method.

Бирюков Владислав Олегович

Аспирант, Российский университет дружбы народов
имени Патриса Лумумбы, г. Москва
vobiryukov12@gmail.com

Аннотация. В работе исследовали численные методы решения волноводных задач, порожденных системой уравнений Максвелла с заданными граничными условиями. Целью работы была разработка и сравнительный анализ конечно-разностного метода и метода конечных элементов, моделирующих распространение собственных поверхностных волн в цилиндрическом диэлектрическом слабонаправленном волноводе.

Для достижения поставленной цели описали математическую модель на основе уравнений Максвелла, реализовали методы и провели вычислительный эксперимент в среде Maple, сравнили результаты по точности, устойчивости и вычислительным затратам, проанализировали влияние геометрии и параметров модели.

Мы предположили, что оба метода обеспечивают сопоставимую точность, однако различаются по устойчивости и вычислительным затратам в зависимости от сложности геометрии и параметров модели.

Полученные значения собственной функции обоих методов хорошо согласуются между собой, что подтверждают построенные графики, позволяющие визуально сравнить поведение решений. Выявлено, что конечно-разностный метод эффективен при простой геометрии и требует меньших вычислительных ресурсов, тогда как метод конечных элементов более универсален и устойчив при моделировании в областях со сложной границей.

Ключевые слова: волноводы, уравнение Максвелла, метод конечных элементов, конечно-разностный метод.

Введение

Исследование систем, способных передавать волны в определенном направлении, называемых волноводами, проводится давно, но наибольший интерес к ним появился в связи с прогрессом в областях радиофизики и оптоэлектроники. А с развитием вычислительной техники и численных методов возникла возможность решать уравнения Максвелла численно. Уравнения Максвелла являются исходной точкой в задачах математического моделирования электромагнитных явлений. Эти уравнения, сформулированные более чем сто пятьдесят лет назад, по-прежнему востребованы среди инженеров и ученых по всему миру. Применяя подходящие граничные условия и вводя параметры среды в эти уравнения, можно моделировать распространение излучения в разнообразных средах.

Для решения уравнений Максвелла используется конечно-разностный метод в основе которого лежит дискретизация вычислительной области по временным и пространственным переменным и метод конечных элементов, применение которого сводит решение исходной задачи к решению системы алгебраических уравнений.

Целью работы является исследование и реализация конечно-разностного метода и метода конечных элементов, моделирующих распространение собственных поверхностных волн в цилиндрическом диэлектрическом слабонаправленном волноводе и проведение сравнительного вычислительного эксперимента в среде Maple для анализа точности, устойчивости и эффективности.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- Реализовать численные методы и провести вычислительный эксперимент в среде Maple
- Сравнить полученные численные результаты и оценить точность и эффективность каждого метода
- Построить графики значений собственной функции для визуального сопоставления/

1. Постановка задачи

Математическая модель задач волноводной дифракции описывается системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} + i\omega \tilde{\mathbf{B}} = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} - i\omega \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}_0; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{D}} = \rho; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}} = 0; \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{J}} - i\omega \rho = 0. \quad (5)$$

Или в линейном случае:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}; \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}; \quad (7)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \delta \tilde{\mathbf{E}}. \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\tilde{\mathbf{E}}$ — напряженность электрического поля; $\tilde{\mathbf{D}}$ — электрическая индукция; $\tilde{\mathbf{H}}$ — напряженность магнитного поля; $\tilde{\mathbf{B}}$ — магнитная индукция; $\tilde{\mathbf{J}}$ — плотность тока; $\tilde{\mathbf{J}}_0$ — плотность тока источника; ρ — плотность электрических зарядов; ω — циклическая частота; ε — диэлектрическая проницаемость; μ — магнитная проницаемость; δ — электрическая проводимость.

Из (3), (5), (6) и (8) получим:

$$\operatorname{div}((\delta + i\omega\varepsilon)\tilde{\mathbf{E}}) = 0.$$

Учитывая (6)–(8), уравнения (1) и (2) получим уравнения второго порядка относительно $\tilde{\mathbf{E}}$

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} + k^2 \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega \tilde{\mathbf{J}}_0, \quad (9)$$

где $k^2 = i\omega\delta - \omega^2\varepsilon$.

Полагается, что на границе под областей Γ будут выполняться условия непрерывности:

$$[\tilde{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}]_{\Gamma} = 0; \quad (10)$$

$$[\tilde{\mathbf{n}} \cdot (\delta + i\omega\varepsilon)\tilde{\mathbf{E}}]_{\Gamma} = 0. \quad (11)$$

Для определенности будем предполагать, что область ограничена идеально проводящим материалом, т.е. выполняется условие

$$[\tilde{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{E}}]_{\partial\Omega} = 0. \quad (12)$$

2. Методы

2.1. Метод конечных элементов

Методы конечных элементов претерпели значительные изменения, но по-прежнему в значительной степени подходят для численного моделирования в областях, характеризующихся простой геометрией (например, декартовой, цилиндрической или сферической). Тем не менее, растущие потребности фундаментальных и прикладных исследований требуют применения уравнений Максвелла для моделирования электромагнитных полей в областях со сложной геометрией границ [Mehdiyeva, Vagif, Mehriban, 2020]. Для решения этой задачи появились универсальные алгоритмы, использующие неструктурированные сетки в области моделирования [Абгарян, Хайбуллин, Шипило, 2022]. Эти алгоритмы используют либо метод конечных объемов, либо метод конечных элементов для численной дискретизации исходных уравнений Максвелла [Неведров, Пульников, Паньков, Матарыкин, 2024].

Для описания метода конечных элементов решения уравнения Максвелла рассмотрим векторную вариационную постановку.

Для области Ω введем пространства следующего вида:

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \left\{ \tilde{\mathbf{v}} \in [L^2(\Omega)]^3 : \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\},$$

$$H_0(\operatorname{rot}; \Omega) = \left\{ \tilde{\mathbf{v}} \in [L^2(\Omega)]^3 : \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{n}}|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

$$\text{с нормой } \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\operatorname{rot}, \Omega}^2 = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^* d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}}^* d\Omega.$$

Скалярное произведение введем по следующему правилу:

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^* d\Omega.$$

Вариационная постановка задачи (9)–(12) примет вид: найти такое $\tilde{\mathbf{E}} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$, что для $\forall \tilde{\mathbf{v}} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ выполняется

$$\left(\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{v}} \right) + (k^2 \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{v}}) = -i(\omega \tilde{\mathbf{J}}_0, \tilde{\mathbf{v}}). \quad (13)$$

Используя формулу Грина

$$\int_{\Omega} [p(\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}}) - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot}(p \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}})] d\Omega =$$

$$= \int_{\partial\Omega} p[(\tilde{\mathbf{u}} \times \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}] dS,$$

перепишем уравнение (13) в виде:

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}} d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} [(\tilde{\mathbf{v}} \times \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}] dS.$$

Учитывая, введенные пространства, очевидно, что

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu} [(\tilde{\mathbf{v}} \times \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}] dS = 0.$$

Тогда получится следующая вариационная постановка задачи: найти такое $\tilde{\mathbf{E}} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$, что для $\forall \tilde{\mathbf{v}} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ выполняется

$$\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}, \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}} \right) + (k^2 \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{v}}) = -i(\omega \tilde{\mathbf{J}}_0, \tilde{\mathbf{v}}). \quad (14)$$

Согласно свойству вложения $\operatorname{grad} \phi \in H(\operatorname{rot}, \Omega)$, $\forall \phi \in L^2(\Omega)$ предположим, что $\tilde{\mathbf{v}} = \operatorname{grad} \phi$, $\phi \in L^2(\Omega)$. Тогда (14), с учетом условия разрешимости уравнений Максвелла $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{J}}_0 = 0$ и свойством $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$, примет вид:

$$([\omega^2 \varepsilon + i\omega \delta] \tilde{\mathbf{E}}, \operatorname{grad} \phi) = 0, \forall \phi \in L^2(\Omega).$$

Приведем пример расчетной схемы метода конечных элементов в гексаэдральной сетке на ячейках которой определены базисные функции, ассоциированные сребрами сетки подпространства $H^h(\operatorname{rot}; \Omega) \subset H(\operatorname{rot}; \Omega)$. Эти функции должны выполнять условия непрерывности компонент поля на границе, а также учитывать условие непрерывности компонент $\tilde{\mathbf{E}}$ на границе областей, имеющих разные свойства материала.

Уравнение (14) в дискретной вариационной постановке перепишем в виде:

$$\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}^h, \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{v}}^h \right) + (k^2 \tilde{\mathbf{E}}^h, \tilde{\mathbf{v}}^h) = -i(\omega \tilde{\mathbf{J}}_0, \tilde{\mathbf{v}}^h).$$

Перепишем ее в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} A + B & -C \\ C & A + B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r \\ f_j \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Здесь E_r и E_j — разложение по базису действительной и мнимой компонент, $A = \|a_{i,j}\|_{i,j=1}^N$, $B = \|b_{i,j}\|_{i,j=1}^N$, $C = \|c_{i,j}\|_{i,j=1}^N$, $a_{i,j} = \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{N}}_i^h, \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{N}}_j^h \right)$, $b_{i,j} = -i(\varepsilon \omega^2 \tilde{\mathbf{N}}_i^h, \tilde{\mathbf{N}}_j^h)$, $c_{i,j} = (\delta \omega \tilde{\mathbf{N}}_i^h, \tilde{\mathbf{N}}_j^h)$, $N \in \mathbb{N}$. Базисные функции на единичном кубе можно задать в виде:

$$\tilde{\mathbf{N}}_1^e = (1-y)(1-z)\tilde{\mathbf{i}}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_2^e = y(1-z)\tilde{\mathbf{i}},$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_3^e = (1-y)z\tilde{\mathbf{i}}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_4^e = yz\tilde{\mathbf{i}},$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_5^e = (1-z)(1-x)\tilde{\mathbf{j}}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_6^e = z(1-x)\tilde{\mathbf{j}},$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_7^e = (1-z)x\tilde{\mathbf{j}}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_8^e = zx\tilde{\mathbf{j}},$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_9^e = (1-x)(1-y)\tilde{\mathbf{k}}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_{10}^e = x(1-y)\tilde{\mathbf{k}}$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{11}^e = (1-x)y\tilde{\mathbf{k}}, \quad \tilde{\mathbf{N}}_{12}^e = xy\tilde{\mathbf{k}}.$$

Таким образом, для применения метода конечных элементов решения задач, порожденных волноводными дифракциями, необходимо составить систему линейных алгебраических уравнений (15) и решить ее удобным способом [Политов, Каленчук, Кузько, 2023]. Минусом этого метода является то, что система (15) является плохо обусловленной и несимметричной, поэтому для ее решения применение, к примеру, метода LU-разложения, не всегда дает истинного решения [Mock, 2023]. Также, при неудачном выборе базисных функций, применение метода может и не дать искомого результата.

2.2 Конечно-разностный метод

Наиболее изученным методом решения уравнения Максвелла (1)–(5) является семейство конечно-разностных методов, которые строятся с помощью дискретизации пространственных и временных аргументов вычислительной области [Tian, Wei, He, 2021]. При численном решении сеточных уравнений с использованием явной разностной схемы происходит переход от матричных алгоритмов к векторным. Эта схема обеспечивает повышенную гибкость при разработке алгоритмов [Xie, Fang, Huang, Wu, Ren, Feng, 2022], [Овчинникова, Шмачилин, Кондратьева, 2024]. В то время как матричные алгоритмы представляют область сетки в виде прямоугольного расположения вычислительных путей, векторные алгоритмы обеспечивают более гибкую структуру для структурирования вычислительного процесса.

Для иллюстрации метода, перепишем систему уравнений Максвелла в виде двумерной системы:

$$\begin{aligned}\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_x}{\partial z}; \\ \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_x}{\partial z}; \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}.\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь E_x, H_y, H_z — проекции векторов напряженности исследуемых полей (магнитного и электрического), через ε_0 и μ_0 обозначены электрическая и магнитная постоянные соответственно.

Будем рассматривать вычислительную область

$$D(0 \leq t \leq T, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z), T, L_y, L_z \in \mathbb{R}$$

и граничные условия Дирихле

$$E_x(t, y, 0) = E_x(t, y, L_z) = E_x(t, 0, z) = E_x(t, L_y, 0) = 0.$$

Зададим дискретную область. Для этого разделим область D на $h \in \mathbb{N}$ равных частей и обозначим ее через D_h . Пусть сеточные проекции электрического поля $E_{x,n,k}^m$, магнитных полей $H_{y,n,k}^m$ и $H_{z,n,k}^m$ будут определены узлами

$$\left\{ \begin{aligned} (t_m, y_n, z_k) : t_m &= mh_t, m = \overline{0, \frac{T}{h_t}}, y_n = nh_y, \\ n &= \overline{0, \frac{L_y}{h_y}}, z_k = kh_z, k = \overline{0, \frac{L_z}{h_z}} \end{aligned} \right\},$$

а расстояния $h_t, h_y, h_z \in \mathbb{R}$.

Разностный аналог системы (16) имеет вид:

$$\begin{aligned}\mu_0 \frac{H_{y,n,k}^{m+1} - H_{y,n,k}^{m-1}}{2h_t} &= -\frac{E_{x,n,k+1}^m - E_{x,n,k-1}^m}{2h_z}; \\ \mu_0 \frac{H_{z,n,k}^{m+1} - H_{z,n,k}^{m-1}}{2h_t} &= \frac{E_{x,n+1,k}^m - E_{x,n-1,k}^m}{2h_y}; \\ \varepsilon_0 \frac{E_{x,n,k}^{m+1} - E_{x,n,k}^{m-1}}{2h_t} &= \frac{H_{z,n+1,k}^m - H_{z,n-1,k}^m}{2h_y} - \frac{H_{y,n,k+1}^m - H_{y,n,k-1}^m}{2h_z}.\end{aligned}\quad (17)$$

Такая разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h_t^2, h_y^2, h_z^2)$. Перепишем систему (17) в виде удобном для построения вычислительных алгоритмов:

$$\begin{aligned}H_{y,n,k}^{m+1} &= \alpha(E_{x,n,k+1}^m - E_{x,n,k-1}^m) + H_{y,n,k}^{m-1}; \\ H_{z,n,k}^{m+1} &= \beta(E_{x,n+1,k}^m - E_{x,n-1,k}^m) + H_{z,n,k}^{m-1}; \\ E_{x,n,k}^{m+1} &= \theta_y(H_{z,n+1,k}^m - H_{z,n-1,k}^m) - \\ &\quad - \theta_z(H_{y,n,k+1}^m - H_{y,n,k-1}^m) + E_{x,n,k}^{m-1}.\end{aligned}\quad (18)$$

$$\text{Здесь } \alpha = -\frac{h_t}{\mu_0 h_z}, \beta = \frac{h_t}{\mu_0 h_y}, \theta_y = \frac{h_t}{\varepsilon_0 h_y}, \theta_z = \frac{h_t}{\varepsilon_0 h_z}.$$

Неоспоримым достоинством применения формул (18) при их программной реализации является их простота алгоритмизации. Однако, к минусам можно отнести следующий факт. Одним из способов улучшения точности вычислений является прием увеличения количества узлов дискретизации на каждой из осей. При этом существенно возрастает количество итераций вычислительной схемы. Естественным образом значительно возрастает машинная погрешность вычислений. Очевидно, что требования к вычислительным мощностям машины, на которой производятся вычисления, также сильно увеличиваются [Титов, Мазур, 2021]. Обычно на практике при сильном сгущении области дискретизации также возрастают требования к объему памяти ЭВМ, на которой производятся вычисления [Cai, Yi, 2020].

3. Вычислительный эксперимент

В качестве иллюстрации применения изложенных выше численных методов рассмотрим задачу о собственных поверхностных волнах в цилиндрическом диэлектрическом слабонаправленном волноводе. Математическая модель такого процесса имеет вид:

$$\begin{aligned}\Delta u + q(n_j)u &= \lambda u, x \in S_j, j = \overline{1, 2}, \\ u|_{\Gamma} &= 0, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = A > 0,\end{aligned}\quad (19)$$

где Δ — оператор Лапласа, $q(n_j) = k_0^2 n_j^2$, $k_0 > 0$, $n_1 > n_2 > 0$, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, n_1 и n_2 — показатели преломления волновода и окружающей изотропной среды, ε_0 — электрическая постоянная, μ_0 — магнитная постоянная, ω — частота электромагнитных колебаний, λ — собственное число, которое физически означает квадрат продольной постоянной распространения, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали к границе Γ области S_j .

Известно, что собственные числа задачи (19) существуют лишь в интервале $(q(n_2), q(n_1))$ и что эта задача имеет хотя бы одно простое вещественное собственное число, которому соответствует собственная функция u . Целью вычислительного эксперимента является найти разными методами значения собственной функции u , соответствующее заданному собственному числу λ , сравнить полученные значения, оценить вычислительную эффективность методов.

В вычислительной среде Maple была написана программа, позволяющая вычислять значения собственной функции u задачи (19) методом конечных элементов (обозначены — $\hat{u}(x_i)$), конечно-разностным методом (обозначены — $\tilde{u}(x_i)$). Пример, полученных разными методами в результате работы программы, значений

собственной функции u , соответствующей собственному числу $\lambda \approx 1,8$ при $A = 1$, $x \in [0,5]$, приведены в таблицах 1 и 2. Мантисса в программе задавалась равной 10.

Таблица 1.

Значения функции $u(x)$ задачи (26) при $q(n_1) = 2,31$, найденные разными методами

i	x_i	$\hat{u}(x_i)$	$\tilde{u}(x_i)$
1	0	0	0
2	0,357	0,3610275553	0,3608653177
3	0,714	0,7456679093	0,7449931359
4	1,071	1,1790782416	1,1774760954
5	1,429	1,6896055053	1,6865424712
6	1,786	2,3106404426	2,3054019645
7	2,143	3,0828014814	3,0744170109
8	2,5	4,0565913696	4,04371394779
9	2,857	5,2957002724	5,2764993036
10	3,214	6,8811713914	6,8531019571
11	3,571	8,9167015489	8,8762996656
12	3,929	11,5354234189	11,4779401427
13	4,286	14,908612992	14,8275749866
14	4,643	19,2568917827	19,1435341257
15	4,999	24,8646564533	24,7070229869

Таблица 2.

Значения функции $u(x)$ задачи (26) при $q(n_1) = 1,57$, найденные разными методами

i	x_i	$\hat{u}(x_i)$	$\tilde{u}(x_i)$
1	0	0	0
2	0,357	0,3553991825	0,3554712519
3	0,714	0,7003975779	0,7006837649
4	1,071	1,0248987789	1,0255279935
5	1,429	1,3194062307	1,3204875767
6	1,786	1,5753011484	1,5769166723
7	2,143	1,7850947443	1,7872922036
8	2,5	1,9426473917	1,9454402039
9	2,857	2,0433482991	2,0467054447
10	3,214	2,0842504461	2,0881052227
11	3,571	2,0641568278	2,0683998212
12	3,929	1,9836554856	1,9881426318
13	4,286	1,8451022981	1,8496579352
14	4,643	1,6525520361	1,6569739135
15	4,999	1,4116396993	1,4157110648

Из таблиц 1 и 2 и рисунка 1 видно, что результаты, полученные разными методами, хорошо согласуются между собой. Указанные численные методы восстанавливают значения функции в узлах дискретизации по предыдущим значениям. Точность можно увеличить, сделав шаг разбиения сетки больше. Однако, это при-

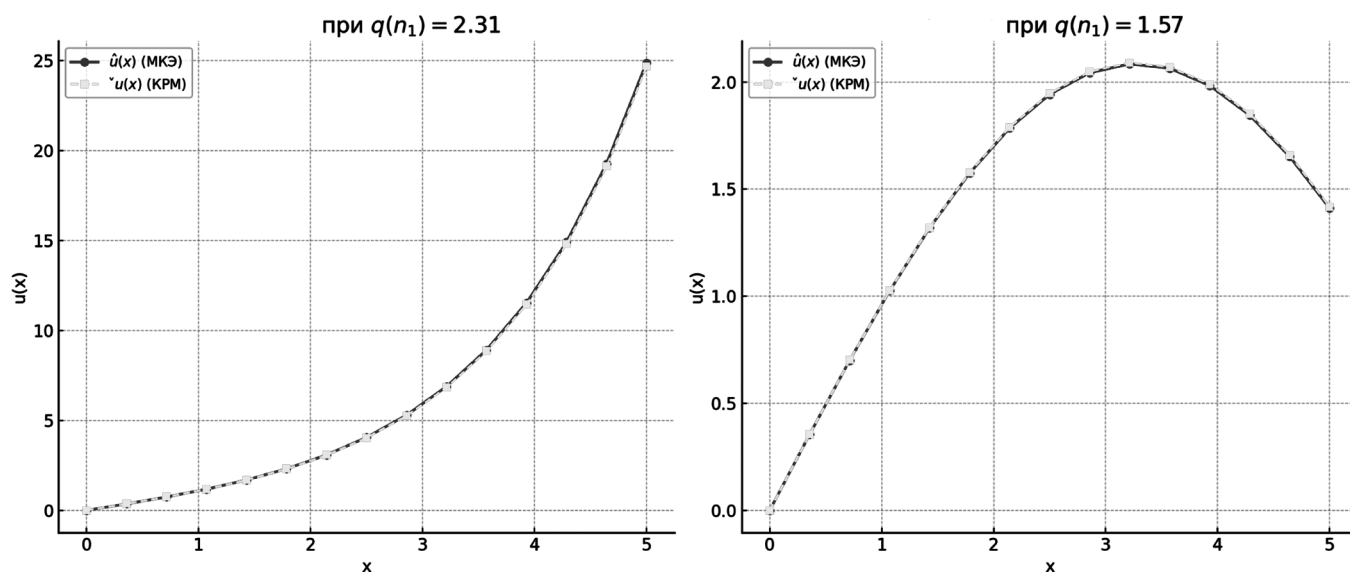


Рис. 1. Сравнение значений собственной функции

ведет к увеличению количества итераций реализации алгоритма. Это не только приведет к затратам памяти вычислительной машины, но и накопит машинную погрешность. Методы ведут себя достаточно устойчиво для задач с простой областью. Если граница области имеет сложную геометрию, то для применения численных методов границу возможно сегментировать. При этом сегментация сложной области производится для каждой задачи индивидуально.

Заключение

Математический аппарат и набор численных методов для задач волноводной дифракции, порожденных уравнением Максвелла, достаточно развит и разнообразен. Метод конечных разностей имеет довольно несложный алгоритм при программной реализации, однако,

весьма чувствителен к геометрии области, на которой определена задача. Метод конечных элементов не так чувствителен к виду области определения исходной задачи, но неудачный выбор базисных функций может существенно сказаться на точности вычислений либо совсем не дать результата.

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что современные модификации численных методов дают достаточно точный результат их реализации для дальнейшего инженерного использования. Также, как показывает вычислительный эксперимент, в силу специфики методов конечных разностей и конечных элементов, их точность возможно увеличить путем увеличения шага разбиения сетки и увеличения количества базисных функций соответственно, при этом заказав достаточно большое значение мантииссы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mehdiyeva G., Vagif I., Mehriban I. Application of the Finite Differences Methods to Computation of Definite Integrals. DOI:10.37394/23202.2020.19.1 // Wseas Transactions on Systems. 2020. Vol. 19. P. 1–6.
2. Абгарян, Г.В. Метод частичных областей в задаче дифракции электромагнитной волны на продольной перегородке в бесконечном волноводе / Г.В. Абгарян, А.Н. Хайбуллин, А.Э. Шипило // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2022. — № 4(64). — С. 3–16. — DOI 10.21685/2072-3040-2022-4-1. — EDN OZZLTO.
3. Неведров В.Р. Модуль метода конечных элементов APM FEM в системе трехмерного моделирования КОМПАС-3D. Расчет напряжений / В.Р. Неведров, И.В. Пульников, А.Д. Паньков, К.А. Матарыкин // Молодежь и системная модернизация страны: Сборник научных статей 8-й Международной научной конференции студентов и молодых ученых. В 4-х томах, Курск, 16–17 мая 2024 года. — Курск: ЗАО «Университетская книга», 2024. — С. 111–114. — EDN UFRKYS.
4. Политов, Р.Е. Основы метода конечных элементов и его применение для прочностного анализа детали в САПР КОМПАС-3D / Р.Е. Политов, В.И. Каленчук, А.В. Кузько // Школа молодых новаторов: сборник научных статей 4-й Международной научной конференции перспективных разработок молодых ученых, Курск, 13 июня 2023 года / Северо-Кавказский федеральный университет, Пятигорский институт. Том 2. — Курск: Закрытое акционерное общество «Университетская книга», 2023. — С. 320–322
5. Mock A. Multiorder Harmonic Analysis of Time-Varying Media Using Time-Domain Simulation, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2023, 71(2), 561–569.
6. Tian W., Wei B., He X. Improved FDTD Method for Coupling Analysis of a Dielectric-Coated Wire Above Rough Soil Surface Under HPDM Pulse, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2021, 64(1), 129–138.
7. Xie G., Fang M., Huang Z., Wu X., Ren X., Feng N. A Numerical Study of Lossy Multipole Debye Dispersive Media Using a Recursive Integral-FDTD Method, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2022, 71(3), 1009–1018.
8. Овчинникова Е.В. Применение метода конечных разностей во временной области для расчета направленных свойств двумерных излучающих структур / Е.В. Овчинникова, П.А. Шмачилин, С.Г. Кондратьева [и др.] // Труды МАИ. — 2024. — № 137.
9. Титов, Е.В. Анализ способов компьютерного моделирования электромагнитного поля на объектах с излучающими источниками / Е.В. Титов, Д.Р. Мазур // Актуальные вопросы энергетики: Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Омск, 14–15 мая 2021 года / Редакция: П.А. Батраков (отв. ред.) [и др.]. — Омск: Омский государственный технический университет, 2021. — С. 188–191.
10. Cai W. Yi, Y. Optimal error estimates of finite difference time domain methods for the Klein-Gordon-Dirac system, IMA Journal of Numerical Analysis, 2020, 40(2), 1266–1293.

© Бирюков Владислав Олегович (vobiryukov12@gmail.com)

Журнал «Современная наука: актуальные проблемы теории и практики»